LABORATORIUM METOD OBLICZENIOWYCH

APROKSYMACJA

Pojęcie aproksymacji

- Aproksymacja – proces określania rozwiązań przybliżonych na podstawie rozwiązań znanych, które są bliskie rozwiązaniom dokładnym w ściśle sprecyzowanym sensie.
- Aproksymacja funkcji powoduje pojawienie się błędów, zwanych błędami aproksymacji.

Pojęcie aproksymacji

- Aproksymację można wykorzystać w sytuacji, gdy nie istnieje funkcja analityczna pozwalająca na wyznaczenie wartości dla dowolnego z jej argumentów, a jednocześnie wartości tej nieznanej funkcji są dla pewnego zbioru jej argumentów znane.

Pojęcie aproksymacji

- Funkcja aproksymowana f(x) określona może być w różny sposób.
- Często funkcja określona jest w sposób dyskretny jako zbiór wartości funkcji $\{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$ określonych dla zbioru punktów zwanych węzłami aproksymacji $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$

$$f_0=f(x_0),\ f_1=f(x_1),\ f_2=f(x_2),$$

Pojęcie aproksymacji

- Oznaczmy przez $F(x)$ funkcję aproksymującą, która przybliża funkcję $f(x)$.

$$F(x) \approx f(x)$$

- Błąd takiego przybliżenia wynosi:

$$E(f) = f(x) - F(x)$$

- W klasycznym przypadku przez aproksymację rozumieć będziemy poszukiwanie, dla danej funkcji $f(x)$, takiej funkcji $F(x)$, aby przyjęta norma błędu $\|E(f)\|$ była najmniejsza.

Pojęcie aproksymacji

- Do najczęściej stosowanych norm błędu należy norma średniokwadratowa:

$$\left\| E(f) \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(f(x_i) - F(x_i) \right)^2}$$

Pojęcie aproksymacji

- Funkcję $F(x)$ zapisujemy w postaci liniowej kombinacji n funkcji, które będziemy nazywać funkcjami bazowymi. Zatem:

$$F(x)=c_0f_0(x)+c_1f_1(x)+ c_2f_2(x)+ \ldots +c_nf_n(x),$$

gdzie $f_0(x),f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x)$ są ustalonymi funkcjami bazowymi, $c_0,c_1,c_2,\ldots,c_n$ są poszukiwanymi współczynnikami.

Pojęcie aproksymacji

- Funkcje bazowe mogą być różnego rodzaju:
  - jednomianów x^k,
  - funkcji trygonometrycznych $\sin(kx)$,
  - wykładniczych e^{kx}.
- Jeżeli funkcje bazowe w postaci jednomianów, to funkcja aproksymująca ma postać:

$$F(x)=c_n x^n+\ldots+c_2 x^2+c_1 x+c_0$$

i mamy do czynienia z aproksymacją wielomianem.

Pojęcie aproksymacji

- Przy aproksymacji wielomianem:

$$F(x)=c_n x^n+\ldots+c_2 x^2+c_1 x+c_0$$

  zadanie sprowadza się do tego by wyznaczyć takie współczynniki $c_n, \ldots, c_2, c_1, c_0$, aby błąd aproksymacji był najmniejszy.
- Najprostszym przykładem wielomianowej funkcji aproksymującej jest wielomian 1^{go} stopnia:

$$F(x)=c_1 x+c_0$$

  czyli funkcja liniowa.

Przykład 1

- Dystans potrzebny do zatrzymania samochodu jest funkcją jego prędkości. Następujące dane eksperymentalne zostały zebrane celem zbadania tej zależności.

v [km/h]	15	20	25	30	40	50	60
s [m]	2	2.5	4.25	5	7.5	11.25	15

- Ocenić odległość hamowania dla samochodu jadącego z prędkością 45 km/h.
- Czy wielkości v i s są liniowo zależne?

Przykład 1 – realizacja w Matlabie

```
% Deklaracja danych:
v = [15 20 25 30 40 50 60];
s = [2 2.5 4.25 5 7.5 11.25 15];
% Wyznaczenie współczynników
wielomianu aproksymującego stopnia 1go:
[w] = polyfit(v,s,1);
% Obliczenie drogi hamowania s
% dla v=45 km/h
s = polyval(w, 45)
```

Przykład 2

- Dysponując zbiorem wartości funkcji f(x) przeprowadzić aproksymację wielomianową i określić optymalny stopień wielomianu aproksymującego.
- Zadanie zrealizowane jest w M-pliku o nazwie *apr_krzywa.m*