

LABORATORIUM METOD OBLICZENIOWYCH

INTERPOLACJA

Problem:

Dane są w pewnym przedziale punkty:

x_0, x_1, \dots, x_n - węzły interpolacji

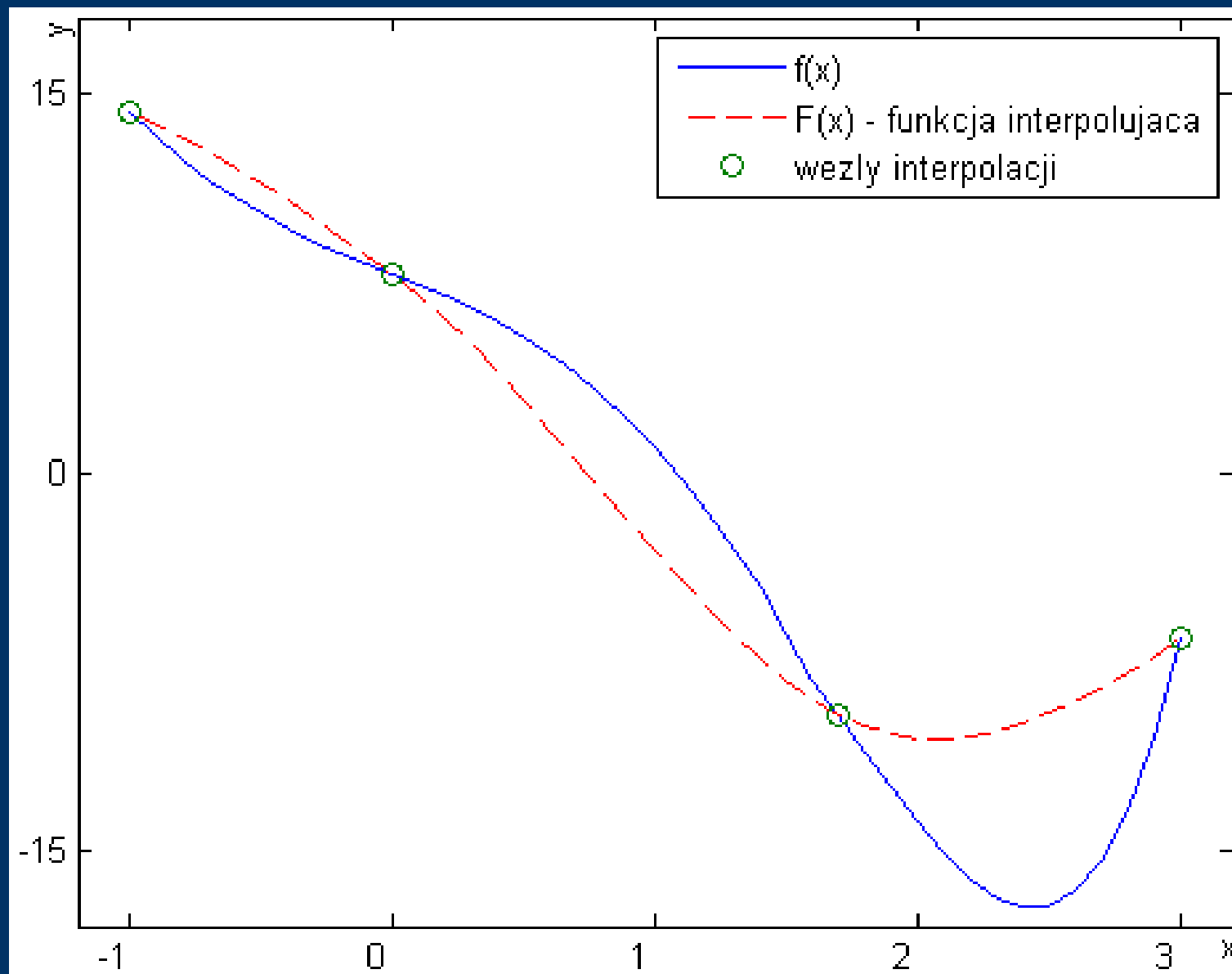
oraz wartości nieznanej funkcji $y = f(x)$

$y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, \dots, y(x_n) = y_n$.

Jak znaleźć przybliżone wartości funkcji w punktach nie będących węzłami?

W tym celu należy wyznaczyć funkcję $F(x)$, zwaną funkcją interpolacyjną, która w węzłach interpolacji przyjmuje wartości takie, jak funkcja $f(x)$.

Problem:



Postaci funkcji interpolującej

- wielomian algebraiczny

$$W_n(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$$

- wielomian Lagrange'a

$$\sum_{j=0}^n y_j \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_{j-1}) \cdot (x-x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_j-x_0) \cdot (x_j-x_1) \cdot \dots \cdot (x_j-x_{j-1}) \cdot (x_j-x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x_j-x_n)}$$

- wielomiany trygonometryczne
- funkcje sklepane (splajny)

Ćwiczenie 1a

Znaleźć wielomian interpolacyjny, który w punktach $-2, 4$ przyjmuje wartości $3, 8$.

Rozwiązanie

Ponieważ znamy wartości funkcji w dwóch punktach możemy wyznaczyć wielomian interpolacyjny w postaci funkcji liniowej.

Ćwiczenie 1a c.d.

Podstawiając do wzoru Lagrange'a dla $n=1$ mamy:

$$W_1(x) = 3 \cdot \frac{(x-4)}{(-2-4)} + 8 \cdot \frac{(x+2)}{(4+2)}$$

po przekształceniach otrzymujemy wielomian:

$$W_1(x) = \frac{5}{6} \cdot x + \frac{14}{3}$$

Ćwiczenie 1b

Znaleźć wielomian interpolacyjny, który w punktach $-2, 1, 2, 4$ przyjmuje wartości $3, 1, -3, 8$.

Rozwiązanie

Ponieważ znamy wartości funkcji w czterech punktach możemy wyznaczyć wielomian stopnia trzeciego.

Podstawiając do wzoru Lagrange'a dla $n=3$ mamy:

Ćwiczenie 1b c.d.

$$W_3 = 3 \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-4)}{(-2-1) \cdot (-2-2) \cdot (-2-4)} + 1 \cdot \frac{(x+2) \cdot (x-2) \cdot (x-4)}{(1+2) \cdot (1-2) \cdot (1-4)} \\ + -3 \cdot \frac{(x+2) \cdot (x-1) \cdot (x-4)}{(2+2) \cdot (2-1) \cdot (2-4)} + 8 \cdot \frac{(x+2) \cdot (x-2) \cdot (x-2)}{(4+2) \cdot (4-1) \cdot (4-2)}$$

po przekształceniach otrzymujemy wielomian:

$$W_3(x) = \frac{2}{3} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{25}{6} \cdot x + 6$$

Ćwiczenie 2

Dana jest funkcja:

$$a) \quad f(x) = \sin(x) + \sin(2 \cdot x).$$

$$b) \quad f(x) = \cos(x)^2 + \sin(0.5 \cdot x) + 4.$$

Znaleźć w przedziale

$$a) \quad [0 \ 4]$$

$$b) \quad [2 \ 7]$$

wielomian interpolujący Lagrange'a stopnia 5.

Rozwiązanie

Wykorzystać skrypt *ineterpolacja_cw2.m*.

Interpolacja w MATLAB-ie

Funkcja *interp1* w postaci:

$$y_i = \text{interp1}(x, y, x_i, 'metoda')$$

umożliwia wykonanie interpolacji funkcji jednej zmiennej w punktach określonych wektorem x_i . Węzły interpolacji określone są parametrami x i y .

Interpolacja w MATLAB-ie

Parametr *'metoda'* umożliwia wybór metody interpolacji:

- *'linear'* - interpolacja funkcją przedziałami liniową
- *'spline'* - interpolacja funkcjami sklejanymi 3-go st.
- *'cubic'* - interpolacja wielomianami 3-go st.
(przedziałami sześcienna)

Ćwiczenie 3

Dana jest funkcja:

$$f(x) = \sin(x) + \sin(2 \cdot x).$$

Korzystając z funkcji *interp1* wyznacz interpolacje funkcji $f(x)$.

Rozwiązanie

Wykorzystać skrypt *ineterpolacja_cw3.m*.