Metoda Różnic Skończonych

LABORATORIUM METOD OBLICZENIOWYCH

BELKA
- obciążenie ciągłe

Wprowadzenie

Metoda Różnic Skończonych (MRS):

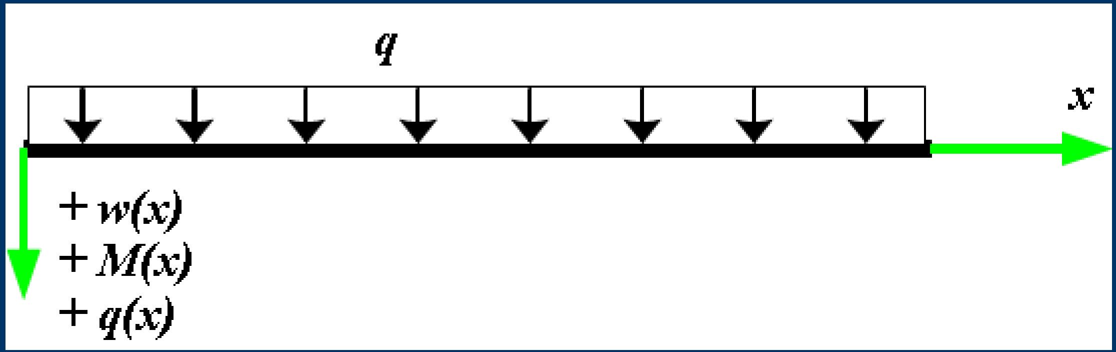
- dyskretna metoda rozwiązywania równań różniczkowych,
- otrzymujemy przybliżone rozwiązanie funkcji w założonych węzłach siatki,
- równanie różniczkowe zastępowane jest operatorami różnicowymi, a następnie układem równań,
- rozwiązanie układu równań możliwe jest po wcześniejszym uwzględnieniu warunków początkowych i/lub brzegowych.

Przykład nr 1

Wiele otaczających nas zjawisk opisać możemy równaniami różniczkowymi. Przykładowo funkcja ugięcia ***w(x)*** belki opisana jest zależnością:

$$\frac{d^4}{dx^4} w(x) = \frac{q(x)}{EI(x)} \qquad (1)$$

gdzie: x – położenie,
$q(x)$ – intensywność obciążenia,
E – moduł Younga,
$I(x)$ – moment bezwładności przekroju.



Przykład nr 1 (cd)

W MRS równanie (1) zastępowane jest różnicą skończoną, której współczynniki zależą od stopnia równania różniczkowego. W omawianym przypadku:

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI(x)} \rightarrow \boxed{1} - \boxed{-4} - \boxed{6} - \boxed{-4} - \boxed{1} \times \frac{W}{h^4} \approx \frac{q_i}{EI_i}$$

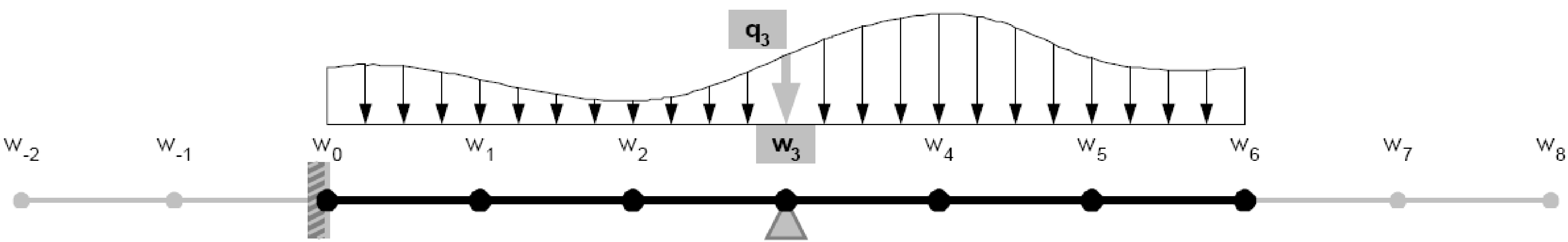
gdzie

$$W = \begin{bmatrix} w_{i-2} \\ w_{i-1} \\ w_i \\ w_{i+1} \\ w_{i+2} \end{bmatrix}$$

Następnie dokonuje się dyskretyzacji układu tworząc siatkę, a w kolejnych jej węzłach rozpisuje się schematy różnicowe.

Przykład nr 1 (cd)

Na poniższym schemacie pokazana została belka z przyjętymi węzłami siatki (w0 do w6) oraz równaniami rozpisanymi dla każdego z nich.



+1	w_{-2}	–4	w_{-1}	+6	w_0	–4	w_1	+1	w_2		w_3		w_4		w_5		w_6		w_7		w_8	=	$h^4\, q_0/EI_0$
	w_{-2}	+1	w_{-1}	–4	w_0	+6	w_1	–4	w_2	+1	w_3		w_4		w_5		w_6		w_7		w_8	=	$h^4\, q_1/EI_1$
	w_{-2}		w_{-1}	+1	w_0	–4	w_1	+6	w_2	–4	w_3	+1	w_4		w_5		w_6		w_7		w_8	=	$h^4\, q_2/EI_2$
	w_{-2}		w_{-1}		w_0	+1	w_1	–4	w_2	+6	w_3	–4	w_4	+1	w_5		w_6		w_7		w_8	=	$h^4\, q_3/EI_3$
	w_{-2}		w_{-1}		w_0		w_1	+1	w_2	–4	w_3	+6	w_4	–4	w_5	+1	w_6		w_7		w_8	=	$h^4\, q_4/EI_4$
	w_{-2}		w_{-1}		w_0		w_1		w_2	+1	w_3	–4	w_4	+6	w_5	–4	w_6	+1	w_7		w_8	=	$h^4\, q_5/EI_5$
	w_{-2}		w_{-1}		w_0		w_1		w_2		w_3	+1	w_4	–4	w_5	+6	w_6	–4	w_7	+1	w_8	=	$h^4\, q_6/EI_6$

Przykład nr 1 (cd)

Wprowadzenie węzłów wirtualnych spowodowało, że niewiadomych w układzie jest więcej niż równań. Aby pozbyć się nadmiarowych niewiadomych uwzględnić należy warunki brzegowe. Możemy je sformułować w następujący sposób:

1) swobodny koniec: M=0, Q=0
2) utwierdzenie: w=0, ϕ=0
3) podpora (koniec belki): w=0, M=0
4) podpora (nie na końcu): w=0

Na tej podstawie układ równań możemy uprościć, usuwając wiersze i kolumny, w których ugięcia w = 0.

Przykład nr 1 (cd)

Pozostałe warunki brzegowe zapisać należy w postaci równań różniczkowych, a następnie zamienić je na operatory różnicowe odpowiedniego stopnia i wyznaczyć nieznane ugięcia wirtualne:

ad 1) M=0, czyli $\frac{d^2}{dx^2}w(x) = 0$, stąd: $w_7=2w_6-w_5$

Q=0, czyli $\frac{d^3}{dx^3}w(x) = 0$, stąd: $w_8=4w_6-4w_5+w_4$

ad 2) $\phi=0$, czyli $\frac{d}{dx}w(x) = 0$, stąd: $w_{-1}=w_1$

w=0, czyli odrzucam odpowiedni wiersz i kolumnę

ad 4) odrzucam odpowiedni wiersz i kolumnę

Przykład nr 1 (cd)

Po podstawieniu obliczonych (z warunków brzegowych) niewiadomych przemieszczeń wirtualnych, odpowiednie wartości współczynników układu równań należy skorygować:

$$
\left[\begin{array}{cccccccccccccc}
+6 & w_0 & (-4-4) & w_1 & +1 & w_2 & & w_3 & & w_4 & & w_5 & & w_6 \\
-4 & w_0 & (+6+1) & w_1 & -4 & w_2 & +1 & w_3 & & w_4 & & w_5 & & w_6 \\
+1 & w_0 & -4 & w_1 & +6 & w_2 & -4 & w_3 & +1 & w_4 & & w_5 & & w_6 \\
 & w_0 & +1 & w_1 & -4 & w_2 & +6 & w_3 & -4 & w_4 & +1 & w_5 & & w_6 \\
 & w_0 & & w_1 & +1 & w_2 & -4 & w_3 & +6 & w_4 & -4 & w_5 & +1 & w_6 \\
 & w_0 & & w_1 & & w_2 & +1 & w_3 & -4 & w_4 & (+6-1) & w_5 & (-4+2) & w_6 \\
 & w_0 & & w_1 & & w_2 & & w_3 & (+1+1) & w_4 & (-4+4-4) & w_5 & (+6-8+4) & w_6
\end{array}\right]
\begin{array}{c}
= \\ = \\ = \\ = \\ = \\ = \\ =
\end{array}
\begin{array}{c}
h^4\, q_0/EI_0 \\ h^4\, q_1/EI_1 \\ h^4\, q_2/EI_2 \\ h^4\, q_3/EI_3 \\ h^4\, q_4/EI_4 \\ h^4\, q_5/EI_5 \\ h^4\, q_6/EI_6
\end{array}
$$

Przykład nr 1 (cd)

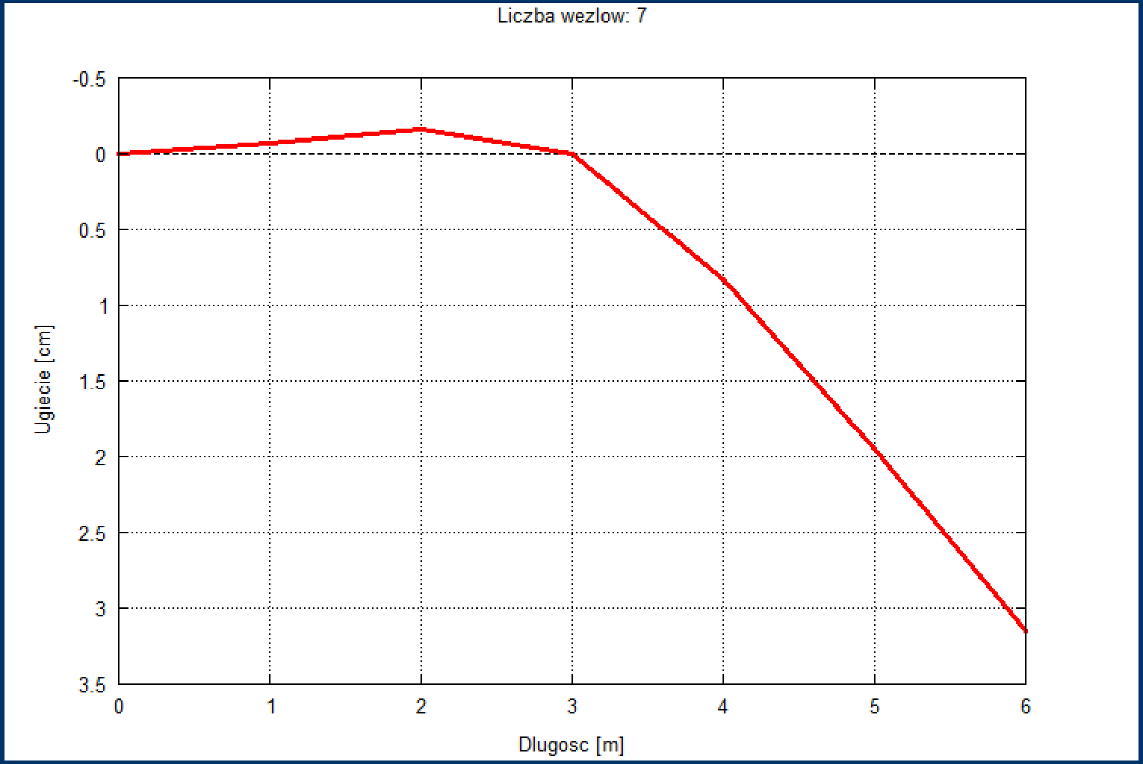
Po uproszczeniu dostaniemy układ równań:

$$\begin{bmatrix} +6 & -8 & +1 & & & & \\ -4 & +7 & -4 & +1 & & & \\ +1 & -4 & +6 & -4 & +1 & & \\ & +1 & -4 & +6 & -4 & +1 & \\ & & +1 & -4 & +6 & -4 & +1 \\ & & & +1 & -4 & +5 & -2 \\ & & & & +2 & -4 & +2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^4\, q_0/EI_0 \\ h^4\, q_1/EI_1 \\ h^4\, q_2/EI_2 \\ h^4\, q_3/EI_3 \\ h^4\, q_4/EI_4 \\ h^4\, q_5/EI_5 \\ h^4\, q_6/EI_6 \end{bmatrix}$$

Kolorem szarym zaznaczone zostały wiersze i kolumny, które możemy zredukować ze względu na zerowe ugięcia w podporach ($w_0 = w_3 = 0$).

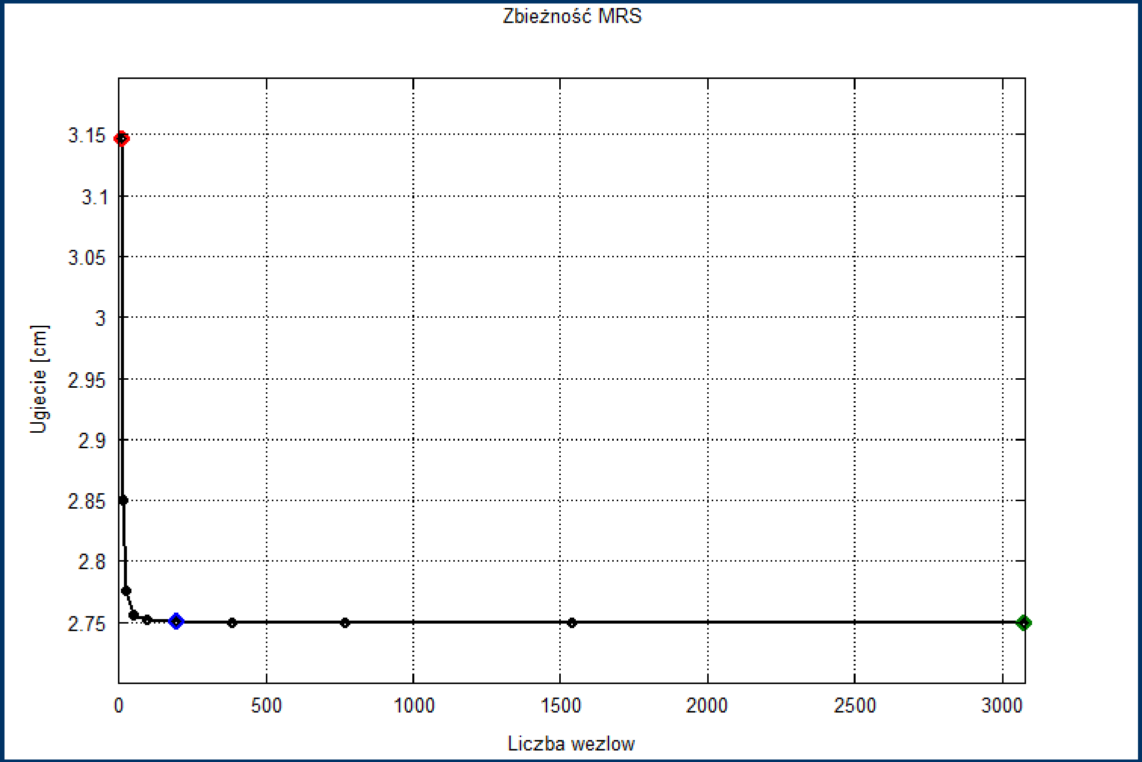
Przykład nr 1 (cd)

Rozwiązując układ równań otrzymamy aproksymację funkcji $w(x)$, tj. wartości ugięcia rozważanej belki w przyjętych węzłach siatki.

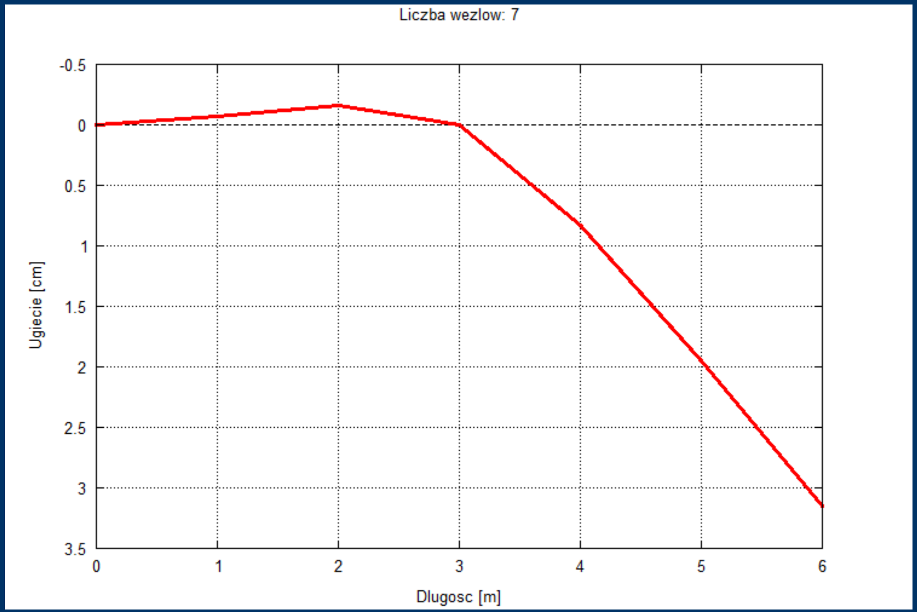


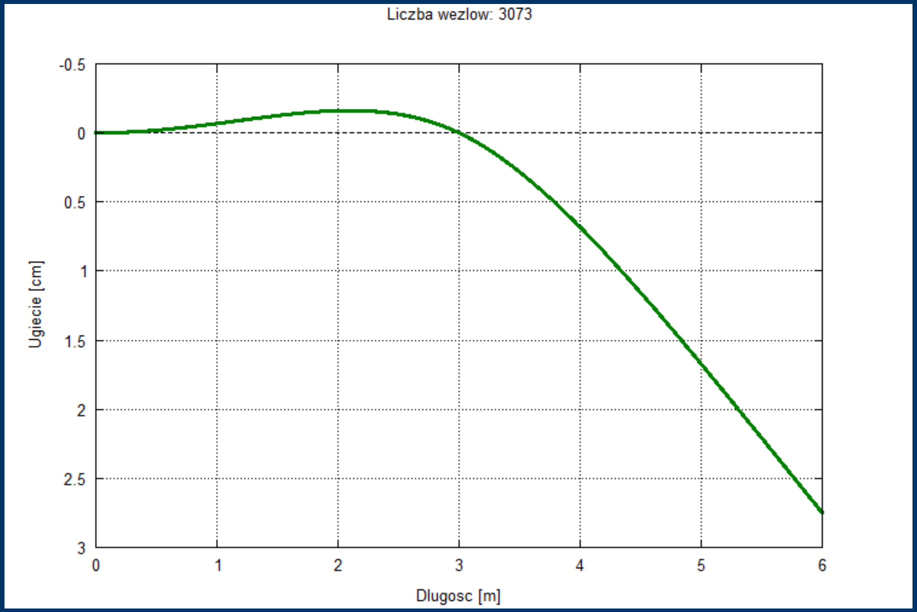
Przykład nr 1 (cd)

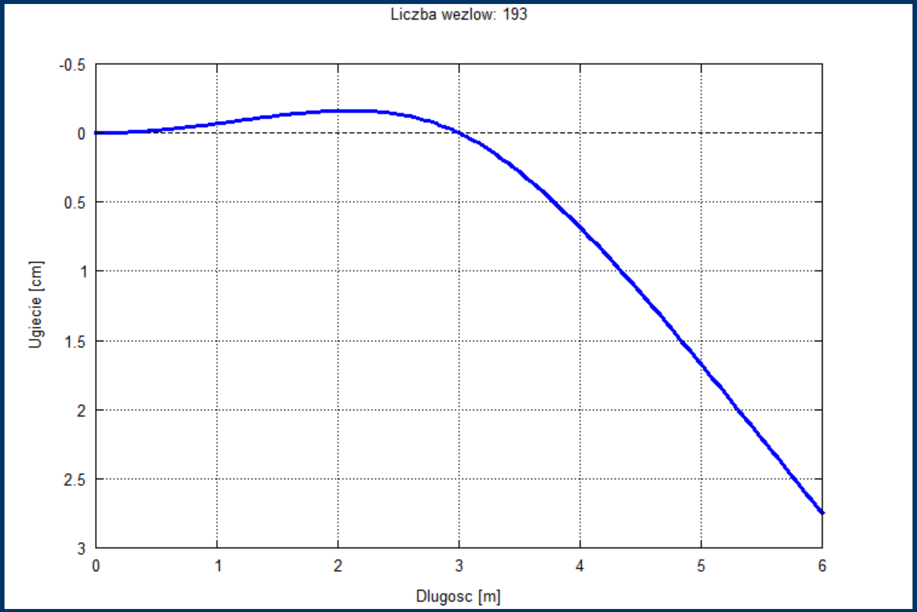
Wraz ze zwiększaniem liczby węzłów siatki obliczane ugięcie zmienia się. Uzyskiwane wyniki są zbieżne, co pozwala na ustalenie optymalnej liczby węzłów. Na wykresie przedstawiono wyniki dla: 7, 13, 25, 49, 97, 193, 385, 769, 1537 i 3073 węzłów.



Przykład nr 1 (cd)







Wykresy przedstawiają linię ugięcia dla:

- małej liczby węzłów,
- bardzo dużej liczby węzłów,
- optymalnej liczby węzłów.

Operatory różnicowe

Równania różniczkowe dla belki i odpowiadające im operatory różnicowe, przy założeniu, że *EI*=const.

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI} \rightarrow \boxed{1} - \boxed{-4} - \boxed{6} - \boxed{-4} - \boxed{1} \times \frac{W}{h^4} \approx \frac{q_i}{EI}$$

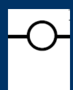
$$\frac{d^3 w(x)}{dx^3} = -\frac{Q(x)}{EI} \rightarrow \boxed{-1} - \boxed{2} - \boxed{0} - \boxed{-2} - \boxed{1} \times \frac{W}{2h^3} \approx -\frac{Q_i}{EI}$$

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \rightarrow \boxed{0} - \boxed{1} - \boxed{-2} - \boxed{1} - \boxed{0} \times \frac{W}{h^2} \approx -\frac{M_i}{EI}$$

$$\frac{d\, w(x)}{dx} = \frac{\varphi(x)}{EI} \rightarrow \boxed{0} - \boxed{-1} - \boxed{0} - \boxed{1} - \boxed{0} \times \frac{W}{2h} \approx \frac{\varphi_i}{EI}$$

$$W = \begin{bmatrix} w_{i-2} \\ w_{i-1} \\ w_i \\ w_{i+1} \\ w_{i+2} \end{bmatrix}$$

Współczynniki korygujące



Swobodny koniec belki

dla dwóch pierwszych równań				dla dwóch ostatnich równań			
wiersz w_1	-4	0	1	wiersz w_{i-1}	0	-1	2
wiersz w_2	2	-1	0	wiersz w_i	1	0	-4

Utwierdzenie z przesuwem

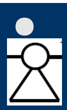
dla dwóch pierwszych równań				dla dwóch ostatnich równań			
wiersz w_1	0	-4	1	wiersz w_{i-1}	0	1	0
wiersz w_2	0	1	0	wiersz w_i	1	-4	0

Współczynniki korygujące (cd)

Pełne utwierdzenie

dla dwóch pierwszych równań			
wiersz w_1	0	-4	0
wiersz w_2	0	1	0

dla dwóch ostatnich równań			
wiersz w_{i-1}	0	1	0
wiersz w_i	0	-4	0



Podpora przegubowa

dla dwóch pierwszych równań			
wiersz w_1	0	4	0
wiersz w_2	0	-1	0

dla dwóch ostatnich równań			
wiersz w_{i-1}	0	-1	0
wiersz w_i	0	4	0

Przykład nr 2: Moment zginający

Moment zginający opisać można równaniem:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{E\,I} \qquad (2)$$

skąd

$$-E\,I\,\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = M(x) \qquad (3)$$

Korzystając z MRS, podobnie jak w przykładzie nr 1, równanie różniczkowe (3) zastąpimy układem równań, w którym wykorzystane zostaną operatory różnicowe odpowiadające stopniowi równania różniczkowego.

Przykład nr 2: Moment zginający

Macierz współczynników przyjmie wówczas postać:

$$L=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

a po uwzględnieniu warunków brzegowych:

$$L=\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Przykład nr 2: Moment zginający

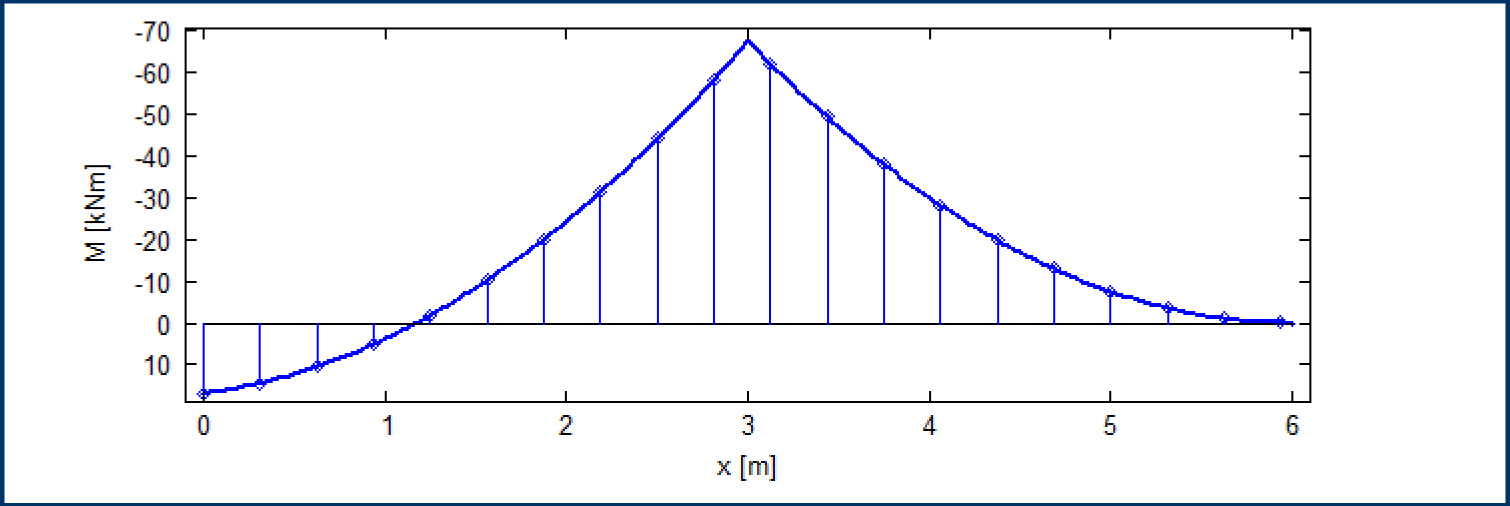
Równianie (3) przyjmie wówczas postać:

$$M = \frac{-E\,I}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}$$

gdzie po podstawieniu w miejsce wektora $\boldsymbol{w}$ wartości ugięć (wyznaczonych w przykładzie nr 1), otrzymamy wartości momentu zginającego M.

Przykład nr 2: Wykres momentu

Wykres momentu zginającego belki z przykładu nr 1, uzyskany za pomocą MRS (dla liczby 25 węzłów oraz obciążenia równomiernie rozłożonego q=15kN/m):



Wytyczne do projektów

- Tematy projektów znajdują się w katalogu z materiałami do zajęć. Prowadzący podaje nr zadania (1 do 56) oraz symbol założeń (A-R), np. 3-C.
- Ocena projektu zależy od stopnia trudności wykonanego zadania:
    - ocena 3,0 – wyznaczenie wykresu linii ugięcia belki dla stałej siatki punktów,
    - ocena 4,0 – określenie optymalnej liczby węzłów na podstawie analizy zbieżności rozwiązania,
    - ocena 4,5 – dodatkowo wyznaczenie wykresu momentu zginającego dla optymalnej gęstości siatki,
    - Ocena 5,0 – dodatkowo wyznaczenie wykresu siły poprzecznej dla optymalnej gęstości siatki.

Wytyczne do projektów

- Sprawozdania przyjmowane będą tylko w wersji elektronicznej (PDF) i powinny one zawierać:
  - stronę tytułową,
  - schemat statyczny oraz dane do projektu,
  - dyskretyzację układu (oddzielny rysunek),
  - war. brzegowe w postaci równań różniczkowych,
  - oraz dodatkowo w zależności od zakresu projektu:
    - **3,0:** wykres linii ugięcia belki dla stałej liczby węzłów oraz wartości ugięć ekstremalnych,
    - **4,0:** wykres pokazujący zmienność rozwiązania w zależności od różnej liczby węzłów, wykres linii ugięcia belki dla optymalnej liczby węzłów oraz wartości ugięć ekstremalnych,
    - **4,5:** wykres momentów zginających dla optymalnej liczby węzłów
    - **5,0:** wykres siły poprzecznej
  - skrypt z kodem programu (na wezwanie prowadzącego).

Nazewnictwo plików

- Pliki projektów należy nazywać wg następującego kodu:

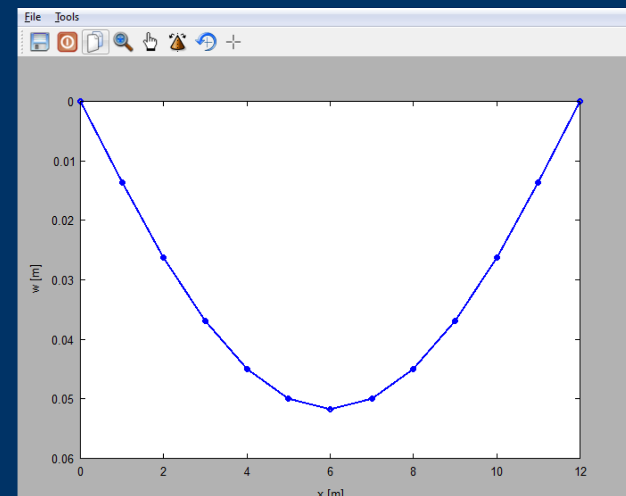
  NazwiskoI_Lp7_MRS_12G.pdf

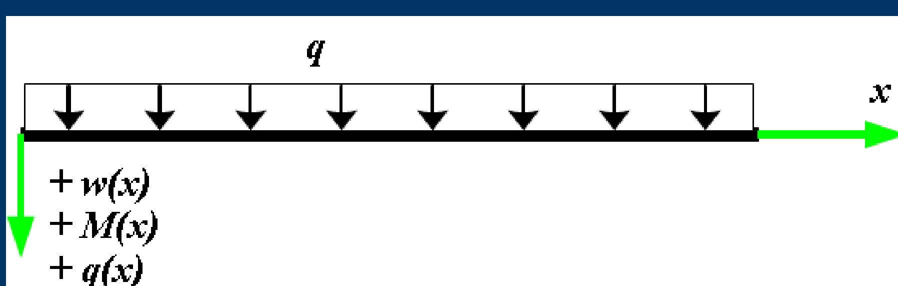
  gdzie za NazwiskoI podstawić należy swoje nazwisko (bez polskich liter) oraz inicjał imienia. Dalej podać należy numer grupy laboratoryjnej, kod MRS oznaczający temat projektu (Metodę Różnic Skończonych) i na koniec numer tematu.

- Gotowe pliki sprawozdań należy skopiować do katalogu wskazanego przez prowadzącego.

Wskazówki

- Wykres ugięcie belki ***w*** zgodny z przyjętym znakowaniem stosowanym na Wytrzymałości Materiałów i na Mechanice Budowli zapewnia opcja
  - set(gca,'YDir','reverse')

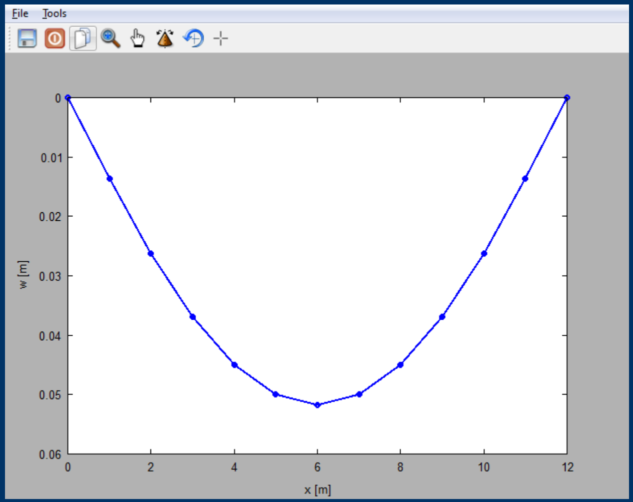





```
plot(0:h:L, M/1000, '-d', 'LineWidth',2)
xlabel('x [m]')
ylabel('M [kNm]')
set(gca,'YDir','reverse')
xlim([-0.1 L+0.1])
```

Wskazówki

- Prawidłowe wyskalowanie okienka z wykresem zapewniające widoczność opisów osi zapewnia opcja
  - sizefig(750,500)




```
plot(0:h:L, M/1000, '-d', 'LineWidth',2)
xlabel('x [m]')
ylabel('M [kNm]')
set(gca,'YDir','reverse')
xlim([-0.1 L+0.1])
sizefig(750,500)
```