Metoda Elementów Skończonych

LABORATORIUM METOD OBLICZENIOWYCH

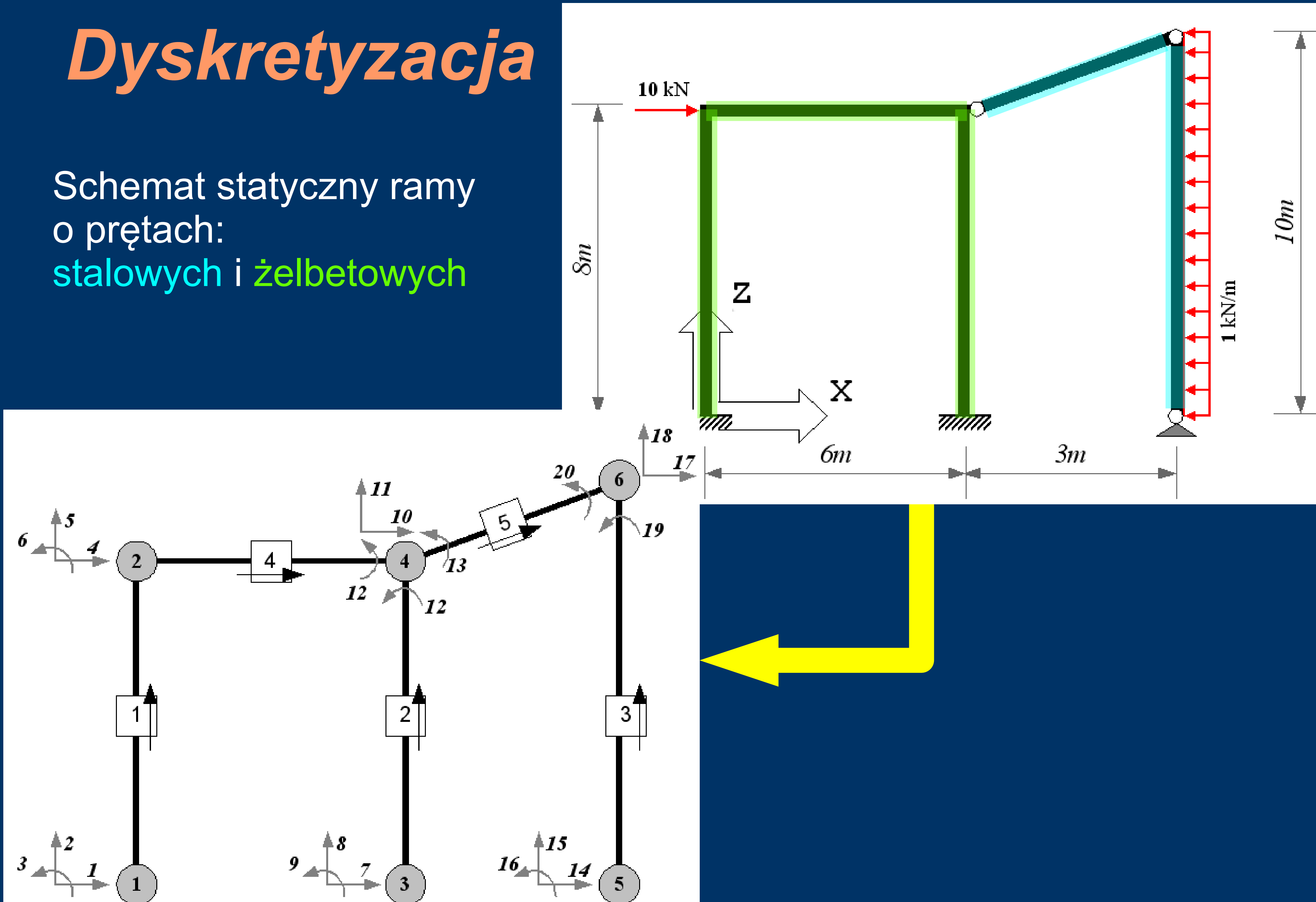
ELEMENT RAMOWY

Algorytm MES

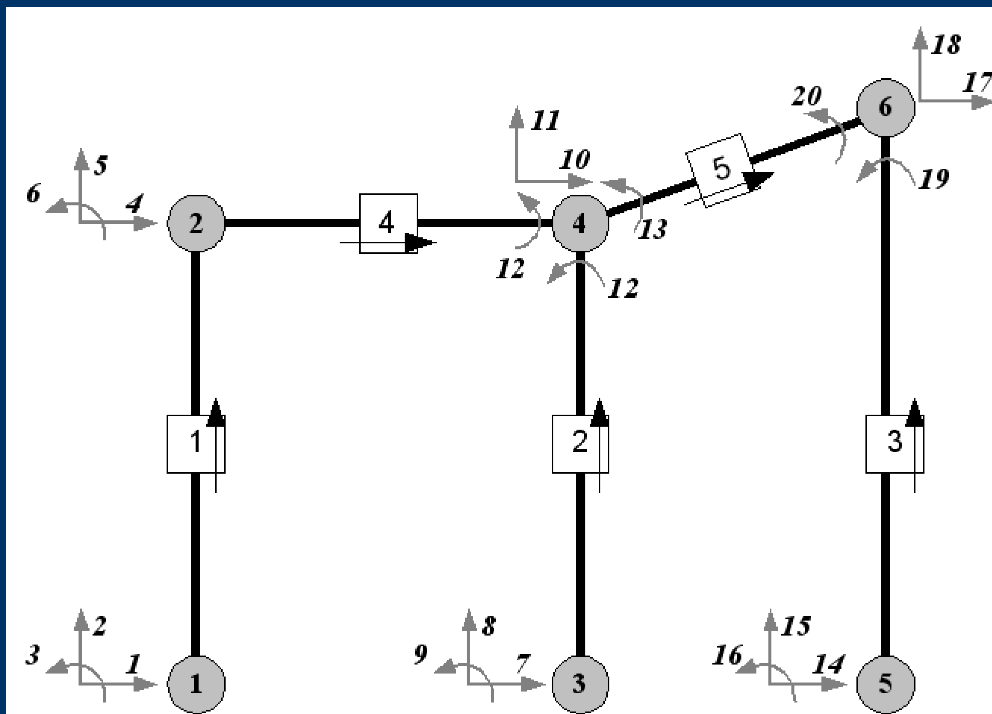
1. Dyskretyzacja ► **Edof**
2. Obciążenie węzłów ► **f**
3. Analiza elementu ► **Ke, fe**
4. Agregacja ► **K, f**
5. Warunki brzegowe ► **bc**
6. Rozwiązanie równania MES ► **K·a = f**
7. Przemieszczenia węzłów elementu ► **ed**
8. Deformacja elementu
9. Siły przekrojowe ► **M, Q, N**

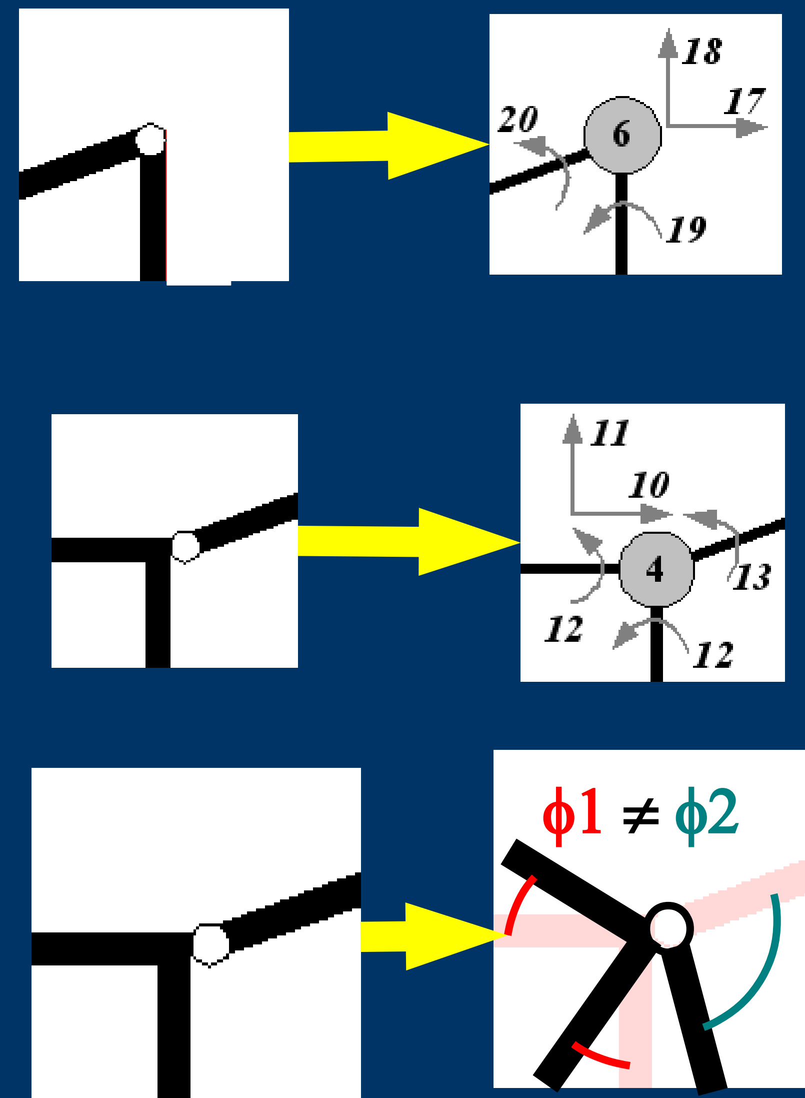
Dyskretyzacja

Schemat statyczny ramy
o prętach:
stalowych i żelbetowych



Dyskretyzacja

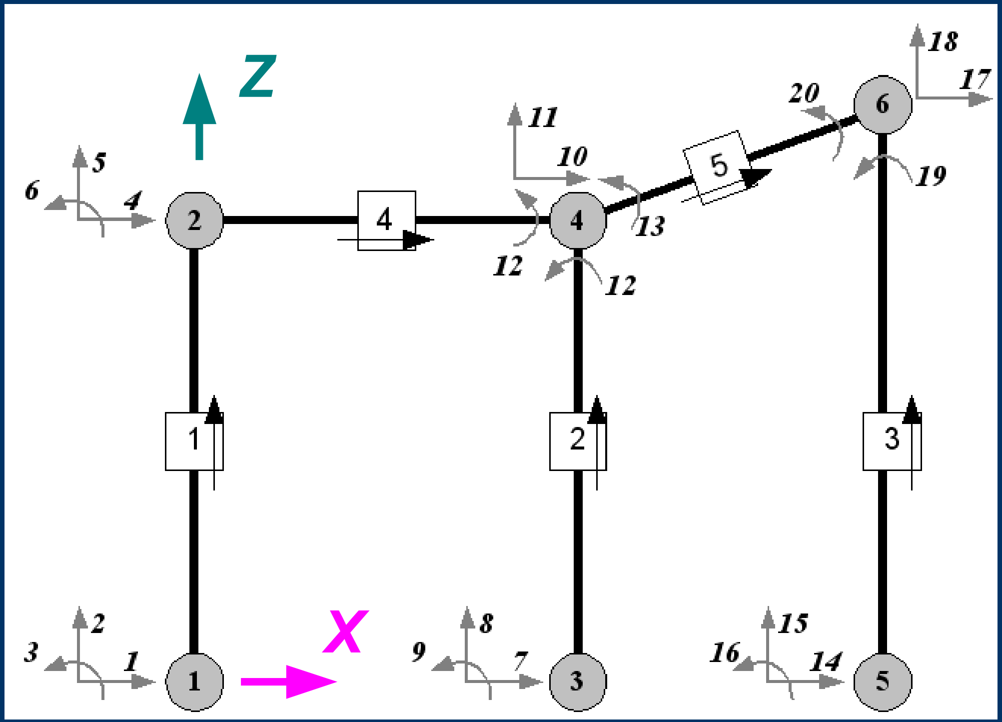




W miejscach wstępowania przegubów w zależności od krotności przegubu zwiększamy liczbę stopni swobody. Każdy element dołączony w sposób przegubowy ma możliwość niezależnego obrotu w węźle.

Dyskretyzacja

Dane definiowane w globalnym układzie współrzędnych *XZ*



1. Macierz współrzędnych Coord:

```
Coord = [0  0;
         0  8;
         6  0;
         6  8;
         9  0;
         9 10];
```

- odcięte (*X*)
- rzędne (*Z*)

Początek układu ***XZ*** w węźle nr 1 → (0,0)

2. Macierz stopni swobody Dof:

Dla kolejnych węzłów w wierszach po trzy numery stopni swobody kolejno:

```
Dof = [ 1  2  3;
        4  5  6;
        7  8  9;
       10 11 13;
       14 15 16;
       17 18 20];
```

- poziome (*X*)
- pionowe (*Z*)
- obrotowe (***XZ***)

3. Macierz topologii Edof:

```
Edof =[1   1  2  3  4  5  6;
       2   7  8  9 10 11 12;
       3  14 15 16 17 18 19;
       4   4  5  6 10 11 12;
       5  10 11 13 17 18 20];
```

- Numery elementów układu,
- Numery stopni swobody wg numeracji globalnej.

Zadeklarowana kolejność węzłów determinuje lokalne układy współrzędnych dla elementów.

Dyskretyzacja

```
[ex,ez] = coordxtr(Edof, Coord, Dof, 2);
```

```
>> [ex, ez]

ans =

     0     0     0     8
     6     6     0     8
     9     9     0    10
     0     6     8     8
     6     9     8    10
```

Macierz [ex,ez] to macierz ze współrzędnymi ***X*** i ***Z*** początku oraz ***X*** i ***Z*** końca każdego elementu skończonego.

Na podstawie współrzędnych obliczane są między innymi długości elementów i kąty ich nachylenia do poziomu.

Macierz charakterystyk fizycznych ep:

- moduł Young'a,
- pole przekroju poprzecznego
- moment bezwładności przekroju względem osi ***Y***

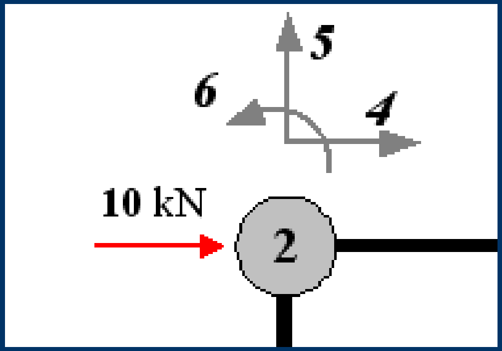
```
ep = [E1 A1 I1;
      E1 A1 I1;
      E2 A2 I2;
      E1 A1 I1;
      E2 A2 I2];
```

Dla każdego elementu w wierszach należy podać stosowne wartości. Podając wartości liczbowe należy uwzględnić przyjęty system jednostek.

Obciążenie węzłów

Wymiar wektora obciążenia zależy od liczby stopni swobody całego układu.

```
f = zeros(20,1);
```



Na kierunku czwartego stopnia swobody przyłożone jest obciążenie o wartości N = 10 kN skierowane zgodnie z przyjętym za dodatni zwrotem przemieszczenia.

```
f(4) = 10e3;
```

Metoda elementów skończonych jest metodą dyskretną dającą rozwiązanie w skończonej liczbie punktów (węzłów). Obciążenie układu musi być podane w sposób dyskretny – tylko w węzłach. Obciążenie ciągłe występujące na długości elementów zastępowane jest równoważnym obciążeniem w węzłach.

Obciążenie elementów

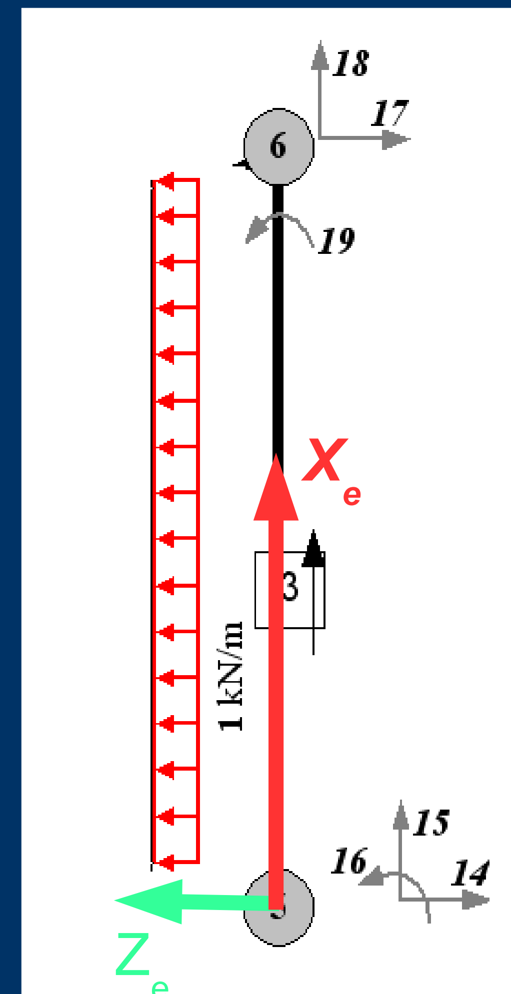
Obciążenie ciągłe elementu podajemy w macierzy obciążeń elementów eq podając wartości obciążenia q_x oraz q_z zgodnie z jego lokalnym układem współrzędnych X_eZ_e.

Zwroty osi układów lokalnych zależą od definicji samych elementów – od tego w jakiej kolejności węzły elementu zostały wprowadzone do macierzy Edof.

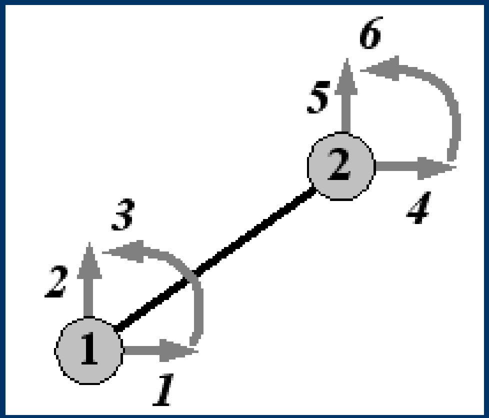
- Oś X_e ma zwrot początek→koniec elementu.
- Oś Z_e *jest prostopadła do* X_e
- Skrętność układu lokalnego X_eZ_e jest taka jak układu globalnego ***XZ***.

```
eq = [0 0;
      0 0;
      0 1e3;
      0 0;
      0 0];
```

Element trzeci obciążony jest obciążeniem równomiernie rozłożonym o intensywności 1000 *N/m.*



Analiza elementu



Element ramowy jest kombinacją elementu kratowego i belkowego.
Węzły elementu ramowego mają po trzy stopnie swobody.

Wymiar lokalnej macierzy sztywności elementu zależy od liczby stopni swobody elementu.

Macierz sztywności elementu czwartego.

```
Ke4 =

  1.0e+008 *

    2.4167         0         0   -2.4167         0         0
         0    0.0168    0.0503         0   -0.0168    0.0503
         0    0.0503    0.2014         0   -0.0503    0.1007
   -2.4167         0         0    2.4167         0         0
         0   -0.0168   -0.0503         0    0.0168   -0.0503
         0    0.0503    0.1007         0   -0.0503    0.2014
```

Agregacja

Wymiar globalnej macierzy sztywności układu zależy od liczby stopni swobody całego układu.

```
K=zeros(20);
```

Agregacja polega na dodaniu wszystkich lokalnych macierzy sztywności elementów (Ke) w jedną macierz sztywności układu (K) z uwzględnieniem topologii układu (Edof). Macierze sztywności elementów są transformowane do układu globalnego.

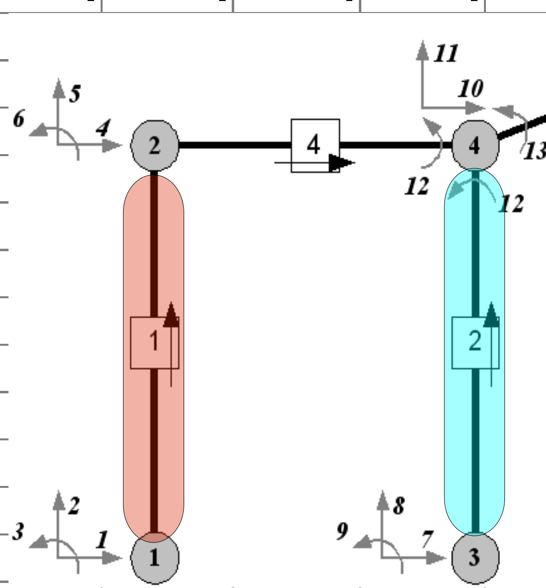
Generowanie lokalnych macierzy sztywności (Ke) i agregacja odbywa się w pętli (*for* ► *end*). W tej samej pętli na podstawie macierzy obciążeń elementowych eq obliczane są elementy wektora obciążenia elementowego fe, który następnie jest agregowany do wektora obciążeń węzłowych f .

```
for i=1:nel
  [Ke,fe]=beam2e(ex(i,:),ez(i,:),ep(i,:),eq(i,:));
  [K,f]=assem(Edof(i,:),K,Ke,f,fe);
end
```

Agregacja

Na rysunku widać wszystkie elementy globalnej macierzy sztywności (K) po dwóch krokach pętli.

1.0e+008 *	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0.0071	0	-0.0283	-0.0071	0	-0.0283	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1.8125	0	0	-1.8125	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-0.0283	0	0.1510	0.0283	0	0.0755	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	-0.0071	0	0.0283	0.0071	0	0.0283	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	-1.8125	0	0	1.8125	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	-0.0283	0	0.0755	0.0283	0	0.1510	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0.0071	0	-0.0283	-0.0071	0	-0.0283	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0					0	0	1.8125	0	0	-1.8125	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0					0	-0.0283	0	0.1510	0.0283	0	0.0755	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0					0	-0.0071	0	0.0283	0.0071	0	0.0283	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0					0	0	-1.8125	0	0	1.8125	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0					0	-0.0283	0	0.0755	0.0283	0	0.1510	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0					0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0					0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0					0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0					0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0					0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0					0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0					0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



Warunki brzegowe

```
bc = [ 1  0;
       2  0;
       3  0;
       7  0;
       8  0;
       9  0;
      14  0;
      15  0];
```

Dla odpowiednich stopni swobody w układzie globalnym podajemy wartości znanych przemieszczeń wynikające z schematu podparcia układu.

Obciążenie pozastatyczne w postaci osiadania podpór uwzględnia się w warunkach brzegowych podając ich faktyczne wartości.

Uwzględnienie warunków brzegowych układu powoduje podstawienie do układu równań znanych wartości niewiadomych, co przy wartościach równych zero powoduje wykreślenie odpowiednich wierszy i kolumn z macierzy sztywności układu.
W konsekwencji redukuje się wymiar macierzy sztywności układu i macierz wówczas staje się macierzą nieosobliwą.

Rozwiązanie równania MES

```
[a,R]=solveq(K,f,bc);
```

Rozwiązaniem równania MES **K·a = f** są nieznane wartości przemieszczeń węzłów ramy na kierunkach kolejnych globalnych stopni swobody.
Wartości reakcji więzów podporowych obliczane są po rozwiązaniu równania MES z równości **R = K·a - f**.

Obliczanie sił przekrojowych

Po rozwiązaniu równania następuje rozdzielenie obliczonych przemieszczeń otrzymanych w układzie globalnym na przemieszczenia w układach lokalnych poszczególnych elementów na podstawie topologii układu.

```
ed=extract(Edof,a);
```

Dla każdego elementu na podstawie przemieszeń jego węzłów, charakterystyk przekroju, współrzędnych węzłów oraz obciążeń elementowych oblicza się wartości siły przekrojowe w elemencie: N, Q, M.

```
for i=1:nel
   [es,edi,eci]=beam2s(ex(i,:),ez(i,:),ep(i,:),ed(i,:),eq(i,:),n);
end;
```

Funkcja kształtu jednoznacznie określa przemieszczenia wewnątrz elementu na podstawie wartości przemieszczeń węzłów elementu.

$$u^e = N\, a^e$$

Tematy projektów

Tematy projektów znajdują się w katalogu z materiałami do zajęć. Prowadzący podaje symbol (A-H), zestaw danych geometrycznych i obciążeń (1-16) oraz dane materiałowe (RS lub RB) dla ramy. Przykładowo: A-1-RS.

UWAGA: W obliczeniach nie uwzględniać ciężaru własnego prętów.

Sprawozdanie

Sprawozdanie należy przygotować w wersji elektronicznej – plik PDF.
Gotowe sprawozdanie należy skopiować na dysk P: do folderu wskazanego przez prowadzącego zajęcia.
Dodatkowo należy na dysk P: skopiować plik o takiej samej nazwie ze skryptem Matlaba.

Sprawozdanie musi zawierać:

- Strona tytułowa
- Schemat układu →rysunek
- Dyskretyzacja →rysunek
- Reakcje więzów podporowych
- Sprawdzenie równowagi obciążeń i reakcji
- Deformacja układu →rysunek
- Wykresy sił przekrojowych z opisami wartości w punktach charakterystycznych (N, Q, M) →rysunek

Nazewnictwo plików

Pliki ze sprawozdaniami należy nazywać wg następującego wzorca:

Nazwiskol_Lp7_MES_D12RB_RAMA.pdf

gdzie za Nazwiskol podstawić należy swoje nazwisko (bez polskich liter) oraz inicjał imienia.
Dalej podać należy numer grupy laboratoryjnej, kod MES oznaczający temat projektu (Metodę Elementów Skończonych), numer tematu i na koniec słowo CALFEM.

Pliki ze skryptem Matlaba należy nazywać wg następującego wzorca:

Nazwiskol_Lp7_MES_D12RB_RAMA.m

Pytania

1. Algorytm MES z omówieniem jego etapów.
2. Charakterystyka elementów 1-D:
   - kratowego,
   - belkowego,
   - ramowego.
3. Układy współrzędnych: globalny i lokalne.
4. Macierz sztywności.
5. Funkcje kształtu.
6. Definicja obciążeń.
7. Interpretacja wyników:
   - analiza zastosowanych jednostek,
   - równowaga reakcji i obciążeń,
   - poprawność deformacji układu prętowego,
   - zachowanie warunków brzegowych.