

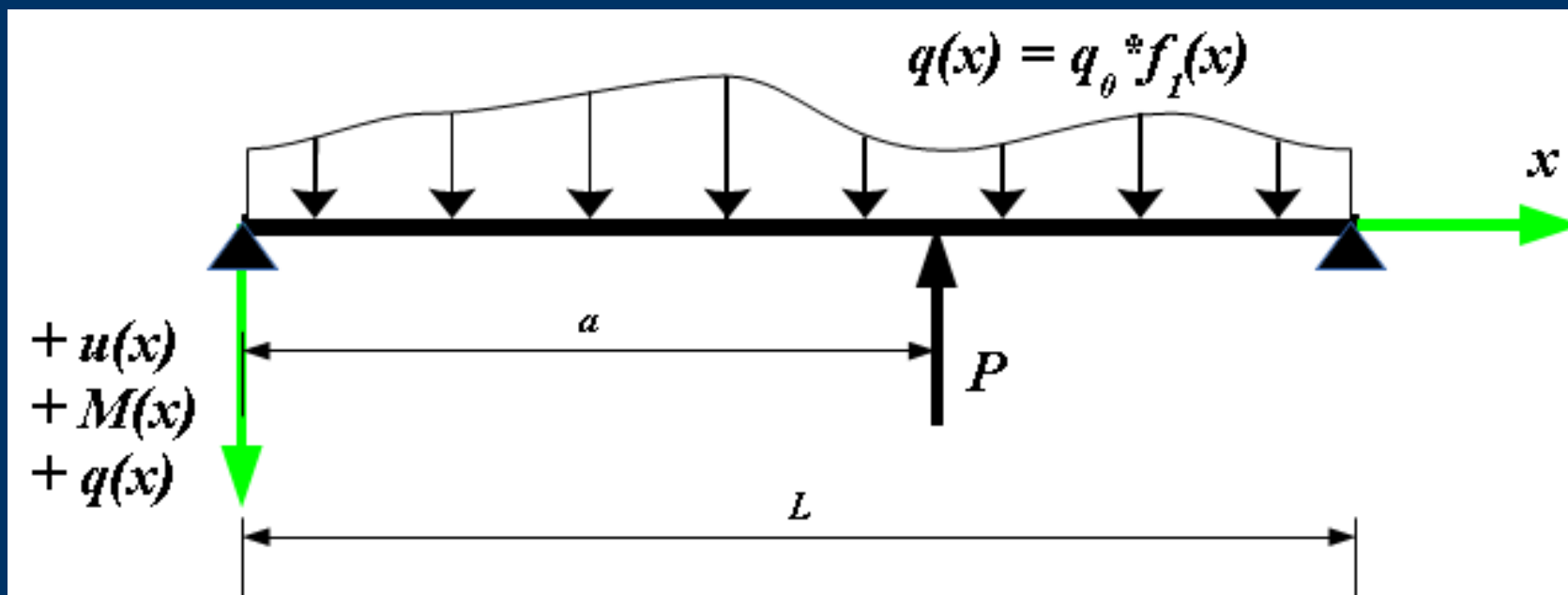
Metoda RAYLEIGHA-RITZA

LABORATORIUM METOD OBLICZENIOWYCH

BELKA

Belka wolnopodparta

- Belka wolnopodparta
 - obciążenie ciągłe zmienne
 - siła skupiona (siły skupione)



Metoda Ritz – teoria (przypomnienie)

- Potencjał energii sprężystej

$$\Pi_p(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{f}} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} d(\partial\Omega)$$

Metoda Ritz – teoria (przypomnienie)

- Przyjęte rozwiązanie

$$\bar{u}(\mathbf{x}) \approx \tilde{u}^N(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(\mathbf{x}) + \phi_0(\mathbf{x})$$

Funkcjonał belki

$$\Pi = \int_0^L \left(\frac{EJ}{2} \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 - u \cdot q \right) dx - Pu(a)$$

Przyjmujemy jako funkcje bazowe

$$\phi_i = \sin \left(\frac{i \cdot \pi \cdot x}{L} \right), \quad \phi_0 = 0$$

Funkcja bazowa i jej druga pochodna

$$\phi_i = \sin\left(\frac{i \cdot \pi \cdot x}{L}\right)$$

$$\frac{d^2 \phi_i}{dx^2} = -i^2 \frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{i \cdot \pi \cdot x}{L}\right)$$

Układ równań algebraicznych

$$\begin{aligned} 0 = \delta \Pi &= \frac{\delta \Pi}{\delta c_1} \delta c_1 + \frac{\delta \Pi}{\delta c_2} \delta c_2 + \dots + \frac{\delta \Pi}{\delta c_N} \delta c_N = \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\delta \Pi}{\delta c_i} \delta c_i \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\delta \Pi}{\delta c_j} = \sum_{j=1}^N A_{ij} c_j - b_i = 0 \quad \text{lub}$$

$$\frac{\delta \Pi}{\delta c_j} = \sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = b_i \quad (i = 1, \dots, N)$$

Pochodna funkcjonału

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = \int_0^L \left(EJ(x) \frac{\partial (\sum_{j=1}^N c_j \cdot \phi_j''')}{\partial c_i} \cdot (\sum_{j=1}^N c_j \cdot \phi_j''') \right) dx$$
$$- \int_0^L \left(q(x) \frac{\partial (\sum_{j=1}^N c_j \cdot \phi_j)}{\partial c_i} \right) dx - P \cdot \frac{\partial (\sum_{j=1}^N c_j \cdot \phi_j(a))}{\partial c_i} = 0$$
$$i = 1, \dots, N$$

Układ równań algebraicznych

- Dla trzech funkcji

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Współczynniki układu równań

$$A_{ij} = \int_0^L EJ(x) \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx$$

$$b_i = \int_0^L q(x) \cdot \phi_i dx + P \cdot \phi_i(a)$$

ponieważ funkcja bazowa sinus jest funkcją ortogonalną to iloczyn $\phi_i \phi_j = 0$ dla $i \neq j$, to

$$A_{ii} = \int_0^L EJ(x) \left(\frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \right)^2 dx \quad A_{ij} = 0$$

Układ równań algebraicznych

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Współczynniki równań

Po podstawieniu drugiej pochodnej z funkcji sinus

$$A_{ii} = i^4 \frac{\pi^4}{L^4} EJ \int_0^L \sin^2 \left(i \cdot \frac{\pi x}{L} \right) dx \quad (x) dx$$

$$b_i = q_0 \int_0^L \sin \left(i \cdot \frac{\pi x}{L} \right) \cdot f_1(x) dx + P \cdot \sin \left(i \cdot \frac{\pi a}{L} \right)$$

$$c_i = \frac{b_i}{A_{ii}}$$

Linia ugięcia i moment zginający

$$u(x) = \sum_{i=1}^N c_i \cdot \sin\left(\frac{i \cdot \pi \cdot x}{L}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{M(x)}{EJ} &= \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = \sum_{i=1}^N c_i \cdot \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} = \\ &= -i^2 \frac{\pi^2}{L^2} \sum_{i=1}^N c_i \cdot \sin\left(\frac{i \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \end{aligned}$$

Matlab – zadania do wykonania

- Definiuj stałe: E , J_0 , q_0 , P , L , a
- Określ liczbę funkcji bazowych: N
- Ewentualnie zdefiniuj funkcje rozkładu zmienności obciążenia: $f_1(x)$
- Oblicz współczynniki równań: A_{ii} , b_i
- Oblicz współczynniki rozkładu: c_i
- Narysuj linię ugięcia $u(x)$

Matlab

Do obliczenia całki skończonej użyj funkcji (tylko MatLab)

```
quad(F, a, b)
```

gdzie

F – rozpatrywana funkcja,

a, b – granice całkowania.

Funkcję F należy definiować w następujący sposób

```
Fi=@(x)sin(i*pi*x/L)
```

```
Fi2= @(x)sin(i*pi*x/L).^2
```

i wywoływać w sposób następujący:

```
quad(Fi,0,L)
```

```
quad(Fi2,0,L)
```

Matlab – użycie pętli

- Jeżeli chcemy wykonać powtarzające się działania dla różnego indeksu i to używamy instrukcji pętli:

```
for i=1:N
    Fi = @(x).....
    Fi2 = @(x).....
    A(i) = .....
    b(i) = .....
    c(i) = .....
    u = u + c(i)*sin(.....)
end
plot(..., u)
```


Rozszerzenia

- Uwzględnić zmienność obciążenia ciągłego
- Rozszerzyć formułę obliczeń na wiele sił skupionych
- Obliczyć i narysować wykres momentu zginającego
- Obliczyć i narysować wykres siły poprzecznej
- Obliczyć i narysować wykres momentu zginającego i siły poprzecznej korzystając z operatorów różnicowych

Wytyczne do projektów

- Tematy projektów znajdują się w katalogu z materiałami do zajęć. Prowadzący podaje nr zadania (1 do 60)
- Ocena projektu zależy od stopnia trudności wykonanego zadania:
 - ocena 3,0 – stałe obciążenie i moment bezwładności, brak sił skupionych, wykresy ugięcia oraz momentu zginającego,
 - ocena 4,0 – zmienne obciążenie, jedna siła skupiona, wykresy ugięcia oraz momentu zginającego,
 - ocena 5,0 – zmienne obciążenie, dwie siły skupione, wykresy ugięcia oraz momentu zginającego i siły poprzecznej.

Wytyczne do projektów

- Sprawozdania przyjmowane będą **tylko w wersji elektronicznej** (PDF) i powinny one zawierać:
 - stronę tytułową,
 - schemat statyczny oraz dane do projektu,
 - oraz dodatkowo w zależności od zakresu projektu:
 - **3,0**: wykresy linii ugięcia belki oraz momentu zginającego,
 - **4,0**: wykresy ugięcia oraz momentu zginającego,
 - **5,0**: wykresy ugięcia oraz momentu zginającego i siły poprzecznej,
 - skrypt z kodem programu (na wezwanie prowadzącego).

Nazewnictwo plików

- Pliki projektów należy nazywać wg następującego kodu:

NazwiskoI_Lp7_MRitza_12.pdf

gdzie za **NazwiskoI** podstawić należy swoje nazwisko (bez polskich liter) oraz inicjał imienia. Dalej podać należy **numer grupy laboratoryjnej**, kod **MRitza** oznaczający temat projektu (Metodę Ritza) i na koniec **numer tematu**.

- Gotowe pliki sprawozdań należy skopiować do katalogu wskazanego przez prowadzącego.

Wskazówki

- Wykres ugięcia belki w zgodny z regułami stosowanymi na Wytrzymałości Materiałów i na Mechanice Budowli zapewnia opcja
 - `set(gca,'YDir','reverse')`

