POLITECHNIKA RZESZOWSKA
im. IGNACEGO ŁUKASIEWICZA

2015

Wprowadzenie do programu SmathStudio

WYDZIAŁ BUDOWNICTWA, INŻYNIERII ŚRODOWISKA I ARCHITEKTURY
POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ

Karol Pereta

Wiesław Bielak

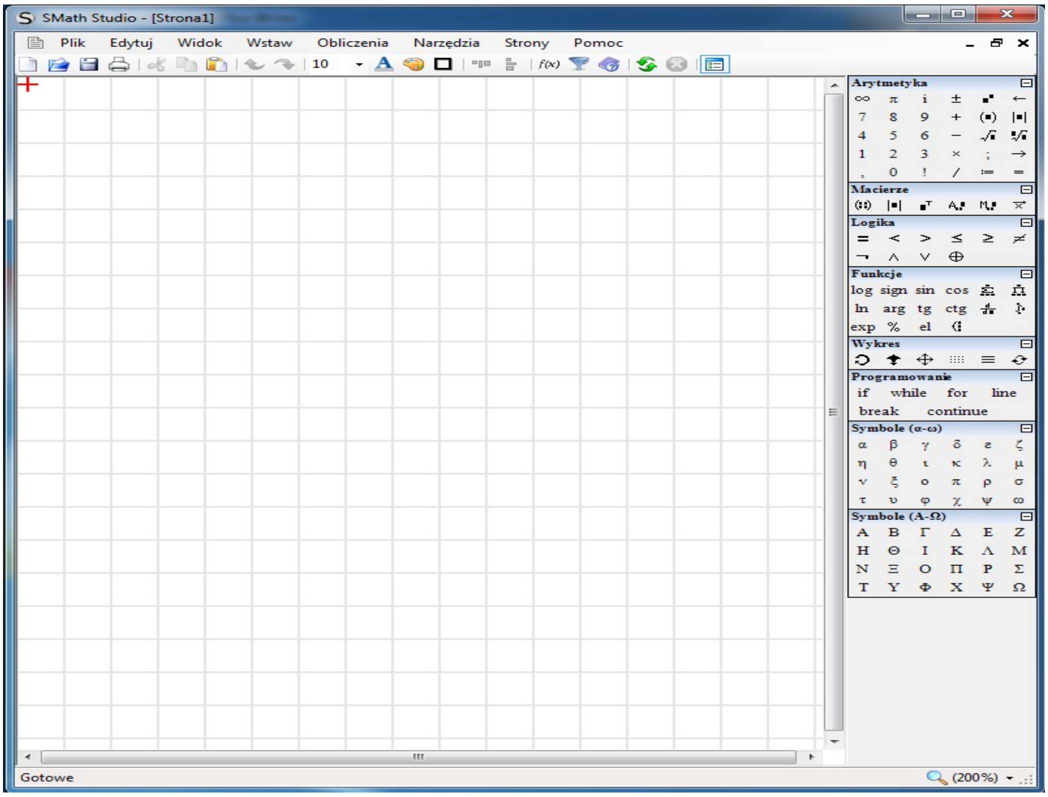
Grzegorz Piątkowski

Maj 2015r.

1. SmathStudio – środowisko pracy

SmathStudio jest darmowym programem wspomagającym obliczenia matematyczne. Jest dobrą alternatywą dla komercyjnego oprogramowania firmy MathSoft znanego pod nazwą Mathcad.

Okno dialogowe programu odzwierciedla kratkowaną kartę z zeszytu formatu A4 (Rys. 1). Równania zapisane w SmathStudio są zdecydowanie czytelniejsze od tych samych równań zapisanych w arkuszu kalkulacyjnym. Podobnie jak w arkuszu kalkulacyjnym zmiana danych wejściowych równania, powoduje automatyczne przeliczenie dalszych części skryptu, wykorzystujących powyższe dane i wyświetlenie aktualnego wyniku (musi być włączona opcja z menu: Obliczenia → Autoobliczenia). Program pozwala wykonywać obliczenia zarówno numeryczne jak i symboliczne (niestety w przypadku tych drugich program jeszcze nie jest doskonały), wyniki możemy przedstawiać w formie wielorakich wykresów. Dokument programu SmathStudio pozwala także na tworzenie opisów (równań czy zmiennych) dzięki czemu program jeszcze bardziej przypomina zwykłą kartkę papieru.



Rys. 1. Okno programu SmathStudio

Z prawej strony okna (Rys. 1) widoczne są paski narzędzi służące do wprowadzania różnego rodzaju znaków: arytmetycznych, macierzy, znaków logicznych, funkcji, wykresów, programowania oraz symboli greckich.

Wszystkie funkcje można odszukać w *Menu głównym* lub na jednym z pasku narzędziowym, dodatkowo większość najczęściej wykorzystywanych funkcji można wywołać za pomocą skrótów klawiszowych.

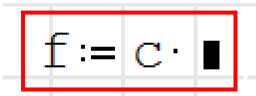
Wszystkie elementy wprowadzane do dokumentu nazywać będziemy **regionami**. Każdy z regionów zajmuje pewien minimalny dla niego obszar dokumentu. W zależności od charakteru wprowadzonego elementu rozróżniamy:

- regiony równań – zawierają definicję zmiennych, równania oraz wyrażenia algebraiczne,
- regiony tekstu – będące komentarzem w dokumencie,

- regiony wykresów – zawierają dwu- i trójwymiarowe wykresy,
- regiony graficzne – zawierają rysunki różnych formatów.

Każdy z regionów w dokumencie można swobodnie przesuwać, kopiować lub kasować w celu uzyskania pożądanej postaci dokumentu. Edycję regionu najwygodniej dokonujemy myszką. Naciskając LPM spowodujemy pojawienie się w tym obszarze pionowej kreski, która określa **punkt wstawienia.** Wewnątrz regionu możemy poruszać się za pomocą klawiszy nawigacji [←], [↑], [→], [↓], [*Home*], [*End*]. Klawisz spacja służy do zmiany zakresu edycji regionu.

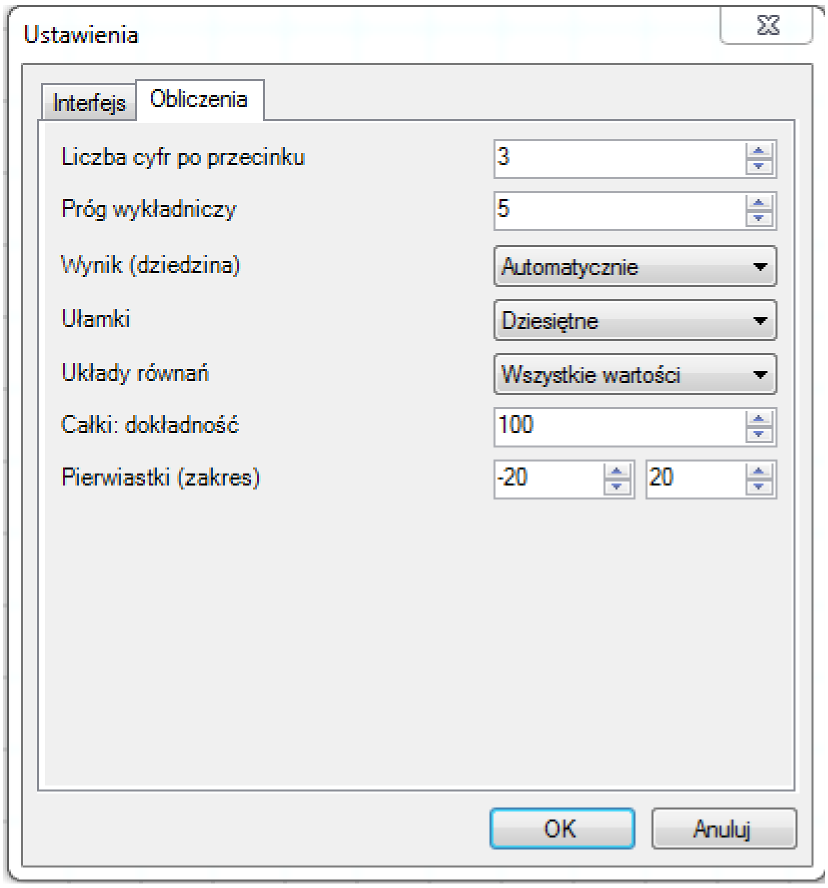
Program interpretuje wprowadzane regiony w naturalnym porządku zapisu, tj. z góry na dół. Cecha ta wymusza zdefiniowanie zmiennej użytej w równaniu powyżej regionu z równaniem. W programie we wszystkich niedokończonych definicjach zmiennych, równań czy na wykresach pojawia się **ramka braku** (Rys. 2) w postaci czerwonej ramki wokół regionu zmiennej. Aby zmienna była zdefiniowana, należy poprawnie uzupełnić wszystkie puste pola w regionie.



Rys. 2. Znacznik braku

2. Obliczanie wartości zmiennych

Przy obliczaniu wyrażeń matematycznych wpisujemy w regionie treść interesującego nas wyrażenia. Domyślnym separatorem dziesiętnym w programie SmathStudio jest przecinek. Dokładność i forma wyświetlanych wyników może być modyfikowana w *Menu Narzędzia →Ustawienia* widoczne na Rys. 3.



Rys. 3. Modyfikowanie wyświetlania wyników

$$\sqrt[3]{\frac{2{,}113 \cdot 10^{4}}{331+3^{6}}}$$

Rys. 4. Obliczenie wartości pierwiastka

Aby obliczyć w SmathStudio wartość pierwiastka przedstawionego na Rys. 4. należy wykonać następujące czynności:

1. Z paska narzędzi *Arytmetyka* wybrać pierwiastek n-stopnia
2. Wprowadzić z klawiatury 2,113*10^4 a następnie wcisnąć spację do momentu widocznego na Rys. 5.

$$\underline{2{,}113 \cdot 10^{4}}$$

Rys. 5. Licznik przyszłego ułamka

3. Wstawić kreskę ułamkową klawiszem[/]
4. Napisać z klawiatury 331+3^6
5. LPM wskazać stopień pierwiastka i wpisać 3
6. Ostatnim krokiem jest wciśnięcie znaku równości [=]

Przy pomocy skrótów klawiszowych można znacznie przyspieszyć wprowadzanie równań. Poniżej zebrane zostały podstawowe skróty klawiszowe i operatory:

[Ctrl] + [=]	Równe w sensie logicznym	**Wprowadzamy [a] następnie [shift]**	Wartość bezwzględna
[Ctrl] + [9]	Mniejsze lub równe	**[Ctrl] + [Shift] + [P]**	Liczba Pi
[Ctrl] + [.]	Symbolicznie równa się	**[Ctrl] + [3]**	Różne od (lewa strona nie równa prawej)
[Ctrl] + [6]	Indeks górny	**[Ctrl] + [0]**	Większe lub równe
[.]	Tekstowy indeks dolny	**Wpisujemy int**	Całka oznaczona
[Ctrl] + [1]	Transponowanie	**Wpisujemy sum a następnie [TAB]**	Suma wyrażeń
[Ctrl] + [\ ]	n-ty pierwiastek	**[\ ]**	Iloczyn wyrażeń
[Ctrl] + [Z]	nieskończoność	**[^]**	Do potęgi

Ćwiczenie 2.1: Obliczyć wartości następujących wyrażeń i porównać ich wyniki.

1.	$\sqrt[5]{\dfrac{123^{4}+3!}{10\cdot\pi+4^{6}}}$	***8,888***
2.	$\displaystyle\int_{0}^{2\cdot\pi}\frac{2\cdot x\cdot\lvert\sin(x)\rvert}{4\cdot\pi+x^{2}}\,dx$	***0,928***
3.	$\ln\left(\sqrt{\dfrac{76}{23+5^{4}}}+100\right)=4{,}609$	***4,609***
4.	$\displaystyle\sum_{n=1}^{5}\left(\frac{5\cdot n+5^{n}}{(n+1)!}\right)$	***26,417***

3. Obliczenia symboliczne

W omawianym programie można wykonywać obliczenia symboliczne tj. przekształcenia i obliczenia na wzorach bez podstawiania wartości numerycznych. Można obliczać pochodne oraz różnego typu równania. Żeby otrzymać rozwiązanie, wynik obliczenia należy zastosować symbol [→] z belki *Arytmetyka* lub nacisnąć [Ctrl] + [.].

Aby obliczyć pochodną należy postępować wg poniższych punktów:

1. Do obliczania pochodnej pierwszego rzędu należy wpisać polecenie *diff*, a następnie zatwierdzić klawiszem [TAB]
   - Do obliczania pochodnej pierwszego rzędu można również wybrać symbol pochodnej z belki *Funkcje* $\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$.
2. Do obliczenia pochodnych wyższych rzędów należy wpisać polecenie *diff* wcisnąć strzałkę w dół wybierając funkcję *diff(3)*, a następnie zatwierdzić wybórw klawiszem [TAB]
3. Wpisać funkcję
4. Uzupełnić różniczkę
5. Wstawić symbol [→] z belki *Arytmetyka* lub alternatywnie [Ctrl] + [.]

Przykład obliczeń symbolicznych pochodnej funkcji x^3 przedstawiono na Rys. 6.

$$\frac{d^{2}}{dx^{2}}\left(x^{3}\right)=6\cdot x$$

Rys. 6. Obliczenie pochodnych

Ćwiczenie 3.1: Obliczyć wartości następujących wyrażeń i porównać wyniki.

Nr	***Wyrażenie***	***Wynik***
1.	$\frac{d}{dx}\left(\ln(x)\cdot x^2\right)$	$x\cdot\left(1+2\cdot\ln(x)\right)$
2.	$\frac{d^2}{dx^2}\left(tg(x)+x^5\right)$	$\frac{2\cdot\left(5\cdot x^3\cdot\cos(x)^2\cdot\left(2\cdot\cos(x)-x\cdot\sin(x)\right)+\sin(x)\cdot\left(1+5\cdot x^4\cdot\cos(x)^2\right)\right)}{\cos(x)^3}$
3.	$\frac{d}{dx}\left(x^5+2\cdot x^4\right)$	$x^3\cdot\left(x+4\cdot(2+x)\right)$

4. Definiowanie zmiennych i funkcji

W SmathStudio w obliczeniach szczególnie wygodne jest stosowanie zmiennych (Rys. 7). Definicja zmiennej polega na przypisaniu konkretnej wartości liczbowej lub innych zmiennych w postaci wyrażenia.

$$a := 15$$

$$b := 25$$

$$c := a + b$$

Rys. 7. Definicja zmiennych

W programie są rozróżniane wielkości liter, dlatego też zmienne o nazwach *aaa* oraz *Aaa* dla programu są dwiema różnymi zmiennymi. Bardzo wygodną formą zapisywania zmiennych jest stosowanie indeksów dolnych (Rys. 8). Zapisu indeksu dolnego dokonujemy po zastosowaniu [.] (kropki).

$$w_{max} := 441$$

Rys. 8. Nazwa zmiennej z indeksem

Nazwy zmiennych oraz funkcji nie mogą rozpoczynać się cyfrą. W nazwach zmiennych swobodnie można stosować indeksy dolne, natomiast stosowanie indeksów górnych powinno być zarezerwowane dla wykładników potęg lub innych operatorów. Stosowanie greckich liter alfabetu umożliwia pasek o nazwie *Symbole*. Oprócz zmiennych, którym przypisana jest jedna wartość liczbowa można definiować zmienne zakresowe. Zmienna zakresowa definiowana jest jako ciąg arytmetyczny. W definicji zmiennej zakresowej należy podać następujące parametry:

1. Wartość początkową ciągu
2. Skok wartości zmiennej jeżeli chcemy aby była to wartość inna niż 1 (jeżeli chcemy,

aby zmienna zmieniała swoją wartość o 2, to w drugim polu musimy podać wartość o dwa większą od początkowej)

3. Wartość końcową

Na Rys. 9 przedstawiono dwa warianty definiowania zmiennej zakresowej. Zmienna definiowana jest za pomocą polecenia **range.** Do wyboru są dwie grupy tej funkcji: **range (2)** – zmienna zakresowa ze skokiem co 1, **range (3)** – zmienna zakresowa, w której wartość skoku możemy zdefiniować.

$$z := 1\,..\,4 \qquad\qquad x := 1\,;\,4\,..\,10$$

$$z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad\qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Rys. 9. Zmienna zakresowa

SmathStudio umożliwia definiowanie funkcji dostępnych w pasku narzędzi, widniejących pod znakiem *f(x)*. Program umożliwia definicje własnych funkcji (Rys. 10), także w tym celu należy:

1. Wpisać nazwę funkcji
2. Określić argument (gdy funkcja ma więcej argumentów rozdzielamy ją znakiem [;])
3. Wpisać znak przypisania [Shift] + [;]
4. Wpisać równanie funkcyjne.

$$f_1(x) := \ln\left(x^3 + 3\right) \qquad\qquad g_1(x\,;\,y) := \ln\left(x^2 + y\right)$$

Rys. 10. Definicja funkcji

Aby obliczyć wartość funkcji dla konkretnych wartości argumentów należy powyżej definicji podać wartości tych argumentów. Wartości te podajemy jako zmienne o nazwach argumentów. Można też wstawić bezpośrednio wartości jako argumenty do funkcji (Rys. 11).

$$x := 2 \qquad\qquad y := 3$$

$$g_1(x\,;\,y) := \ln\left(x^2 + y\right)$$

$$g_1(x\,;\,y) = 1{,}946 \qquad\qquad g_1(5\,;\,4) = 3{,}367$$

Rys. 11. Wartości funkcji g_1

Wartość funkcji można również wyznaczyć dla zmiennych zakresowych (Rys. 12).

$$r := 1 \,..\, 10 \qquad W(r) := 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad W(r) = \begin{pmatrix} 6,283 \\ 12,566 \\ 18,85 \\ 25,133 \\ 31,416 \\ 37,699 \\ 43,982 \\ 50,265 \\ 56,549 \\ 62,832 \end{pmatrix}$$

Rys. 12. Wartość funkcji dla zmiennej zakresowej

Ćwiczenie 4.1 Zdefiniować zmienne i obliczyć wartość wyrażenia:

$$alfa := 12 \qquad \beta_1 := \sqrt{3} \qquad w_{min} := 65 \qquad \frac{alfa \cdot \beta_1}{w_{min}}$$

Ćwiczenie 4.2 Zdefiniować zmienne, obliczyć wartości wyrażeń oraz wyświetlić i porównać wyniki:

$$z_{dop} := 1 \,..\, 6 \qquad \varphi_2 := 11 ; 22 \,..\, 66 \qquad z_{dop} \cdot \varphi_2 \qquad \varphi_2 \cdot z_{dop}$$

$$\varphi_2 + z_{dop} \qquad z_{dop} + \varphi_2$$

5. Obliczenia na jednostkach

Program umożliwia nadawanie wartościom niemianowanym sensu fizycznego przez dodanie im standardowych jednostek. Wyniki działań na zmiennych z jednostkami podawany jest przez program w postaci wartości z jednostką. Jednostkę wyniku możemy ustalić dowolnie. Możemy także stosować własne, zdefiniowane wcześniej jednostki.

Do obliczeń warto stosować nazwy zmiennych, które są ogólnie przyjęte przy danym zagadnieniu. Definicja zmiennej M będącej celem obliczeń przedstawiona została na Rys. 13.

$$a := 10\ m$$

$$P := 1000\ N$$

$$M := P \cdot a$$

$$M = 10000\ J$$

Rys. 13. Definicja zmiennych mianowanych, wynik mianowany

Wyświetlenie wyniku obliczeń, czyli wartości obliczonej zmiennej M, został przedstawiony w podstawowej jednostce (dla przyjętego systemu jednostek) – w naszym przypadku są to **[J = Dżule]** – podstawowa dla systemu **SI** jednostka energii. Czarne pole za literą **[J]** służy do wprowadzenia innej jednostki – wbudowanej lub zdefiniowanej przez użytkownika. Po wciśnięciu znaku równości obliczenia zostaną przeprowadzone automatycznie. Aby zmienić jednostkę należy kliknąć w czarnym polu i z klawiatury wpisać *N*, zatwierdzić klawiszem **[TAB]** następnie wprowadzić [*], wybrać z klawiatury *m* a następnie zatwierdzić klawiszem **[TAB]**. Ostatnim krokiem jest zatwierdzenie całości przyciskiem [**ENTER]** (Rys. 14). Dla nazw jednostek można stosować przedrostki jako mnożniki zmniejszające (litery: *d*, *c*, *i* i inne) lub zwiększające (litery: *h*, *k*, *M* i inne). Na Rys. 15 przedstawiono przykład zastosowania przedrostka zwiększającego *k* równego 1000.

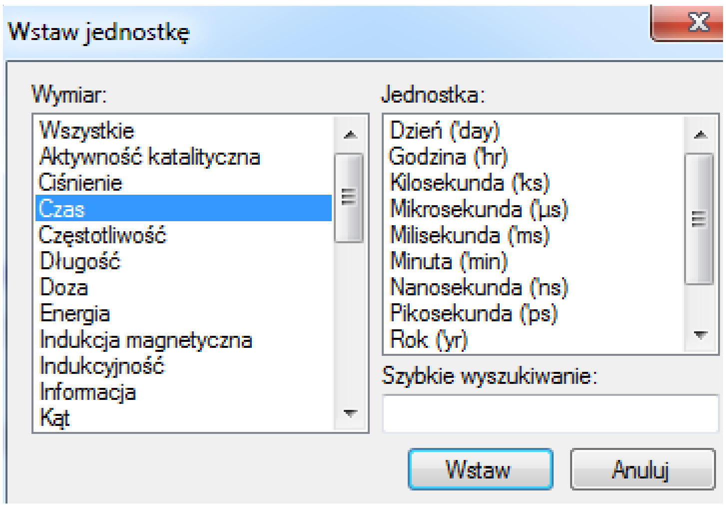
$$M = 10000\ N\ m$$

Rys. 14. Wynik ze zmienioną jednostką

$$M = 10\ kN\ m$$

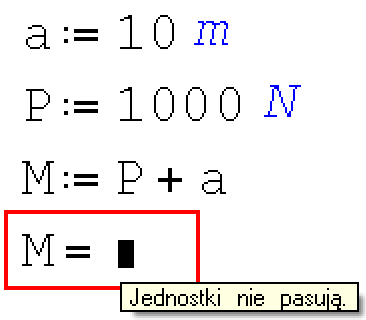
Rys. 15. Wynik z jednostką poprzedzoną przedrostkiem

Jeżeli użytkownikowi nie jest znana jednostka wbudowana, to może on posłużyć się poleceniem Wstaw→Jednostki. Doskonałym przykładem może być jednostka czasu: **[godzina]**, którą w programie SmathStudio zapisuje się jako **[hr]** (Rys. 16).



Rys. 16.Okno służące do wyboru wbudowanych jednostek

Przy korzystaniu z jednostek należy pamiętać o stosowaniu jednostek zmiennych we wzorach, zwłaszcza przy operacjach addytywnych. Program w przypadku niezgodności informuje nas o błędzie przy próbie wyświetlenia wartości zmiennej (Rys. 17).



Rys. 17. Niezgodność jednostek sygnalizowana przez program

Przy wprowadzaniu argumentów funkcji trygonometrycznych program interpretuje wpisane przez nas wartości liczbowe jako podane w mierze radialnej. Wartości dla miar stopniowych uzyskujemy podając miarę kąta z jednostką stopnie (z ang. *deg*), (Rys. 18).

$$tg(45\ deg)$$

Rys. 18. Jednostki w funkcjach trygonometrycznych

ĆWICZENIE 5.1: Zdefiniować własną jednostkę jak na przykład [MPa].

ĆWICZENIE 5.2: Przeliczyć prędkość auta wynoszącą 90km/h na jednostki używane w USA czyli mila/h – zastosować wbudowane jednostki.

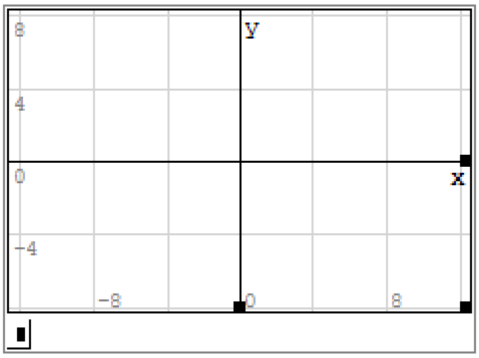
ĆWICZENIE 5.3: Obliczyć moment zginający w środku rozpiętości belki wolno podpartej obciążonej ciężarem własnym z wykorzystaniem jednostek.

ĆWICZENIE 5.4: Obliczyć energię potencjalną ciała sztywnego o konkretnej masie na znanej wysokości.

ĆWICZENIE 5.5: Obliczyć siłę wyporu na ciało zanurzone w cieczy.

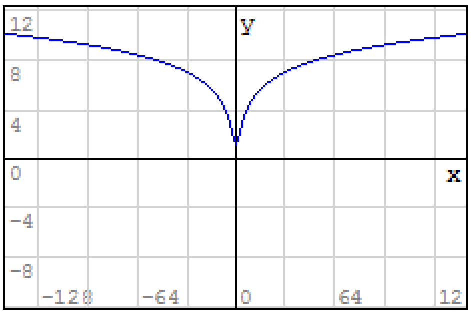
6. Wstawianie i formatowanie wykresów

Oprócz obliczeń numerycznych i symbolicznych program umożliwia użytkownikowi graficzną prezentację wyników w postaci wykresów. W programie można wykorzystać dwa rodzaje wykresów – 2D i 3D. Przed uruchomieniem kreatora wykresów poleceniem z paska narzędzi, (*Wstaw→Wykres)* należy zdefiniować funkcje, której wykres chcemy obejrzeć. Dobrze jest też zdefiniować zakres argumentów funkcji chociaż nie jest to konieczne. Po wstawieniu obszaru wykresu należy w aktywnym polu wpisać nazwę funkcji (Rys. 19).



$x := -100 ; -90 .. 100$

$F(x) := \ln\left(x^2 + 3\right)$



$F(x)$

Rys. 19. Tworzenie wykresu funkcji

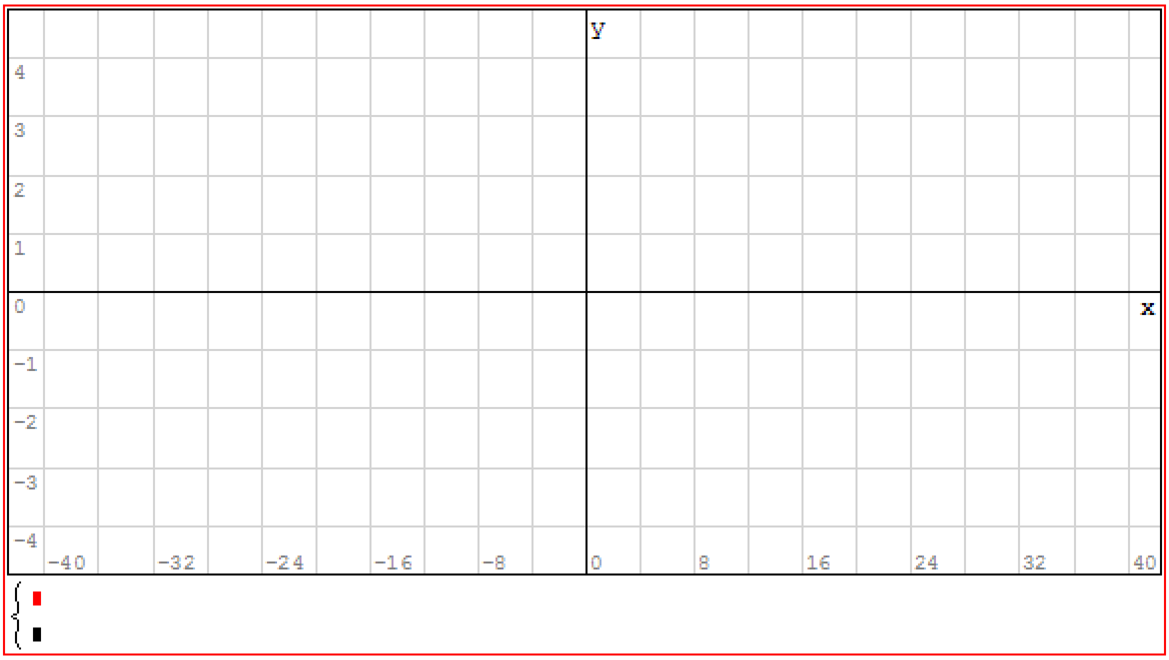
W przypadku programu SmathStudio zmiana zakresu osi jest możliwa za pomocą klawisza [Ctrl] lub [Shift] z pomocą [scroll'a].

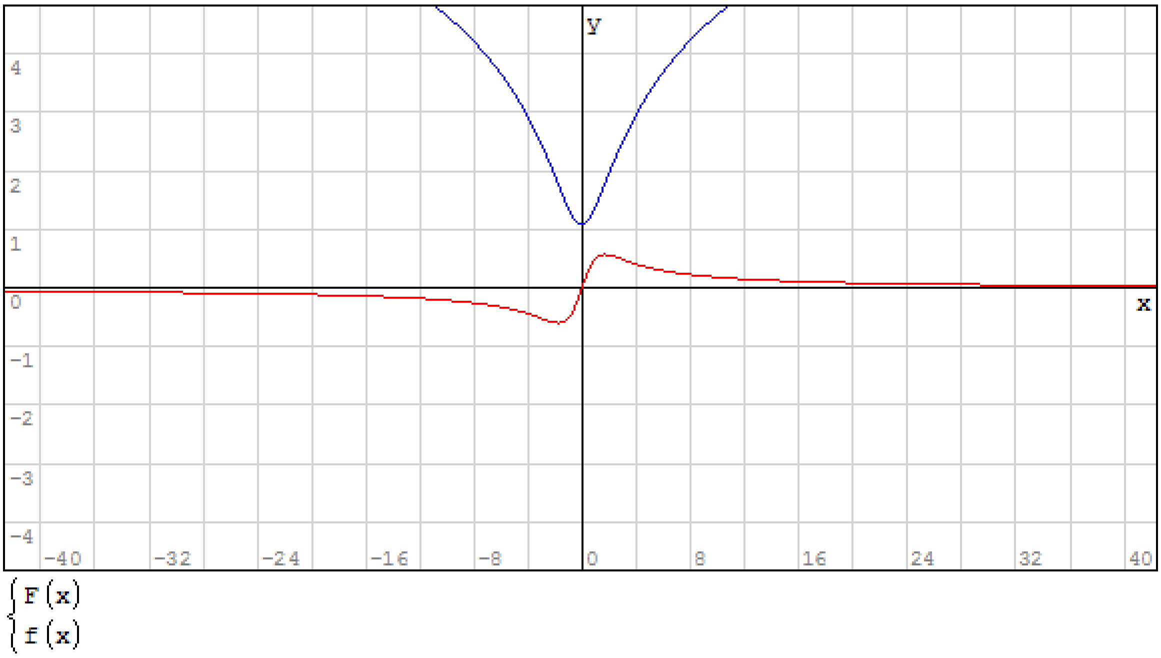
Na jednym wykresie można przedstawić przebieg kilku różnych funkcji w tym samym zakresie odciętych (Rys. 20). W takim przypadku w aktywnym polu należy z belki *Funkcje* wybrać ikonę , a następnie w puste pola wpisać nazwy wcześniej zdefiniowanych funkcji.

$x := -100 ; -90 .. 100$

$F(x) := \ln\left(x^2 + 3\right)$

$f(x) := \frac{d}{dx} \ln\left(x^2 + 3\right)$





Rys. 20. Wykres dwóch funkcji

Ćwiczenie 6.1: Narysować wykres funkcji F(x) i jej pochodnej oraz sformatować jego wygląd tak, tak jak pokazano to na Rys. 20.

7. Obliczenia na macierzach

Wprowadzanie wektorów i macierzy można wykonać z menu *Wstaw→Macierz,* kombinacją klawiszy [Ctrl] + [M] albo wybrać ikonę z belki *Macierze.* Po wykonaniu jednej z powyższych opcji należy wprowadzić elementy macierzy (Rys. 21).

$$K := \begin{pmatrix} 5 & 20 & -30 \\ 120 & 15 & 30 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad L := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Rys. 21. Definicja macierzy

Wartości poszczególnych elementów macierzy możemy uzyskać wykorzystując indeksacje elementów macierzy Rys. 22. Indeks macierzowy wprowadza się przy pomocy funkcji *el(2), el(3).* W pierwszej funkcji, w pierwszym polu wprowadzamy nazwę macierzy natomiast w drugim nr elementu, który chcemy wywołać (numeracja elementów rozpoczyna się od lewego górnego rogu i rośnie aż do prawego dolnego rogu – od lewej do prawej, od góry do dołu). Funkcja *el(2)* umożliwia wyświetlenie żądanego elementu przez wprowadzenie nr wiersza i kolumny, w których znajduje się dany argument.

$$K := \begin{pmatrix} 5 & 20 & -30 \\ 120 & 15 & 30 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad L := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$K_{1} = 5 \qquad L_{7} = 4$$

$$K_{5} = 15 \qquad L_{8} = 10$$

$$K_{1\,2} = 20 \qquad L_{2\,1} = 5$$

$$K_{2\,2} = 15 \qquad L_{2\,2} = 9$$

Rys. 22. Elementy macierzy

Program umożliwia wykonywanie działań na macierzach, oczywiście zgodnych z zasadami rachunku macierzowego. Oprócz podstawowych działań dostępnych w pasku *Macierze* można wykorzystać kilka dodatkowych funkcji:

- col(K;n) – wyświetli n – tą kolumnę macierzy K,
- cols(K) – zwraca liczbę kolumn macierzy/wektora,
- identity(n) – zwraca macierz jednostkową (n x n – jedynki na przekątnej, zera poza),
- length(K) – zwraca liczbę elementów w macierzy, zwraca skalar,
- matrix(x;y) – zwraca zerową macierz o podanym rozmiarze – x – liczba wierszy, y – liczba kolumn,
- minor(K;i;j) – zwraca dopełnienie elementu [i;j] macierzy,
- rank(K) – zwraca rząd macierzy,
- rows(K) – zwraca liczbę wierszy macierzy,
- submatrix(K;i;j;k;n) – zwraca macierz K od i-tego do j-tego wiersza i od k-tej do n-tej kolumny,
- minor(K;i;j) – zwraca podmacierz danej macierzy, powstałą z usunięcia podanego wiersza i podanej kolumny.

Ćwiczenie 7.1: Zdefiniuj macierze i wykonaj na nich działania.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A^{-1}, A^{T}, $A^{-1} \cdot B$, $A \cdot B$

8. Rozwiązywanie równań i układów równań

SmathStudio umożliwia rozwiązywanie równań, nierówności i układów równań oraz równań różniczkowych. Funkcja: *polyroots*() poszukuje pierwiastków wielomianu (Rys. 23). Jako argument funkcji musimy podać wektor ze współczynnikami c_i wielomianu zdefiniowanego w postaci $c_0 \cdot x^0 + c_1 \cdot x^1 + c_2 \cdot x^2 + \ldots + c_n \cdot x^n$.

$$V := \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{polyroots}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}351 \\ 1{,}851 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{polyroots}(V) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}351 \\ 1{,}851 \end{pmatrix}$$

Rys. 23. Pierwiastki wielomianu

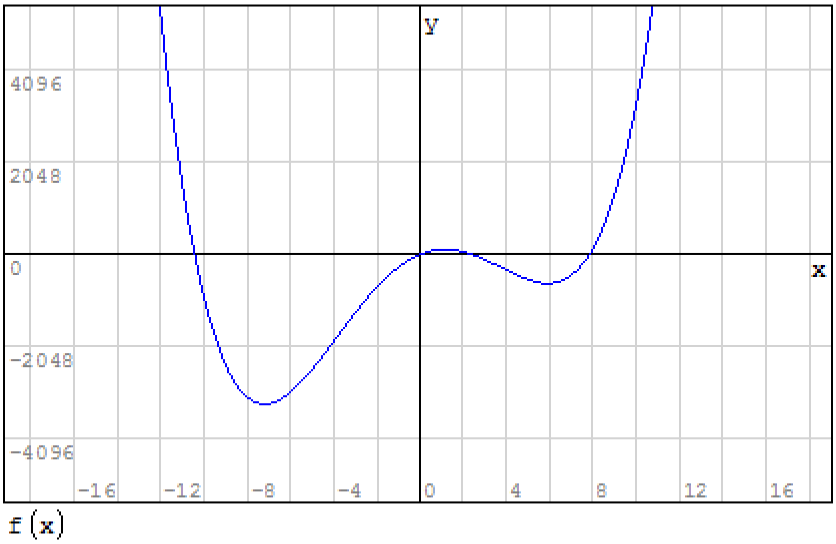
Ćwiczenie 8.1 Znajdź pierwiastki wielomianów:

$$2 \cdot x^4 + 2 \cdot x^3 + 20 \cdot x^2 + 53 \cdot x - 60 \qquad 5 \cdot d^6 + 5 \cdot d^5 + 4 \cdot d^4 + 3 \cdot d^3 + 2 \cdot d^2 + d + 1$$

Polecenie *solve()* pozwala rozwiązać równanie z jedną niewiadomą (Rys. 24). Definiując polecenie musimy mieć wcześniej podaną definicję funkcji. Argumentami polecenia są nazwa funkcji i nazwa zmiennej funkcji, dla której nastąpi poszukiwanie rozwiązania. Aby odnaleźć wszystkie miejsca zerowe dobrze jest wygenerować dodatkowo wykres analizowanej funkcji.

$$f(x) := x^4 - 87 \cdot x^2 + 202 \cdot x + \sin(x)$$

$$\mathrm{solve}(f(x);\, x) = \begin{pmatrix} -10{,}323 \\ 0 \\ 2{,}505 \\ 7{,}82 \end{pmatrix}$$



Rys. 24. Zastosowanie funkcji solve

Ćwiczenie 8.2: Znajdź wszystkie miejsca zerowe równań:

$z(x) := x^3 - e^x + 200$
$f(x) := -x^4 + 20 \cdot x^3 + 300 \cdot x^2 + 20 \cdot x + 15$

Do rozwiązania układów równań liniowych można zastosować tradycyjną metodę macierzową. Musimy jednak zdefiniować macierz współczynników przy niewiadomych oraz wektor wyrazów wolnych, a następnie rozwiązać równanie macierzowe (Rys. 25).

$$\boxed{5 \cdot x + 6 \cdot y - 4 \cdot z := 20}$$

$$\boxed{3 \cdot x + 2 \cdot z := 12}$$

$$\boxed{x - y + z := 0}$$

$$L := \begin{pmatrix} 5 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad P := \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L^{-1} \cdot P = \begin{pmatrix} 1 \\ 5{,}5 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$$

Rys. 25. Rozwiązanie układu równań liniowych – układ, rozwiązanie układu

Ćwiczenie 8.3: Rozwiąż układy równań liniowych:

$$\begin{cases} 12x+20y-5z=37 \\ -5x-y+20z=53 \\ 3x+7y-2z=11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x+6y-2z=65 \\ 6x+y=36 \\ -2x+8y+3z=32 \end{cases}$$

9. Instrukcja warunkowa „*if*”

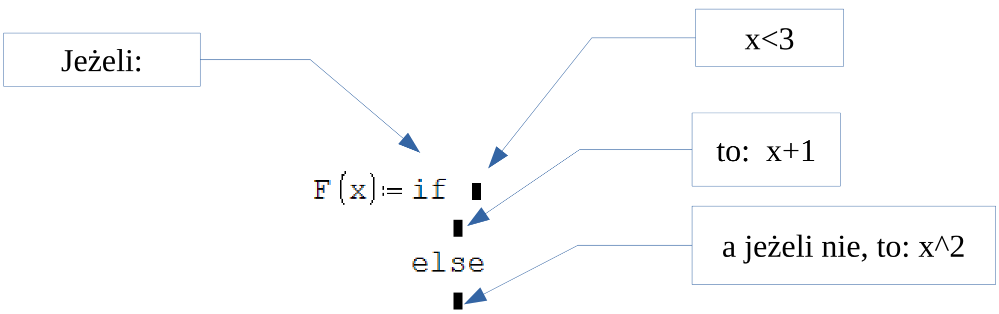
Niektóre funkcje określone są w sposób przedziałowy, tj. w zależności od tego w jakim zakresie znajduje się ich argument (Rys. 26). Wartości takiej funkcji można obliczyć wykorzystując instrukcję warunkową *„jeżeli” (if).*

Budowa i działanie instrukcji warunkowej jest analogiczne jak w arkuszu kalkulacyjnym.

Na Rys. 27 przedstawiono składnię funkcji F(x) za pomocą polecenia *if* w programie SmathStudio.

$$F(x) := \begin{cases} x+1 & x<3 \\ x^2 & x \geq 3 \end{cases}$$

Rys. 26. Przykład funkcji o zmiennej postaci

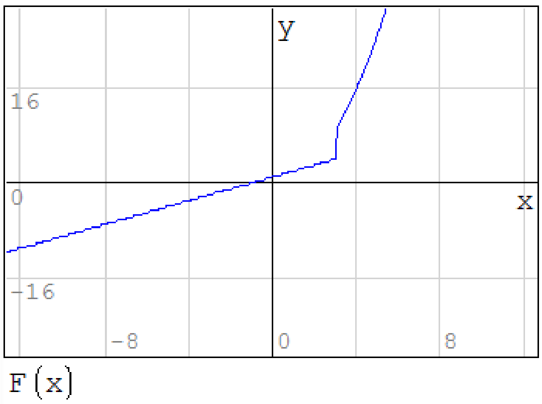


Rys. 27. Zastosowanie polecenia if

Przykład 1a

Na Rys. 28 przedstawiono schemat działania polecenia *if* – jeżeli argument funkcji F(x) jest mniejszy od 3 to wartości funkcji obliczane będą zgodnie z formułą x+1, jeżeli argument funkcji będzie większy bądź równy 3 to funkcja przyjmować będzie wartości x^2.

```
F(x) := if x < 3
            x + 1
        else
            x^2
```



Rys. 28. Zastosowanie funkcji „if” wraz z wykresem wartości funkcji F(x)

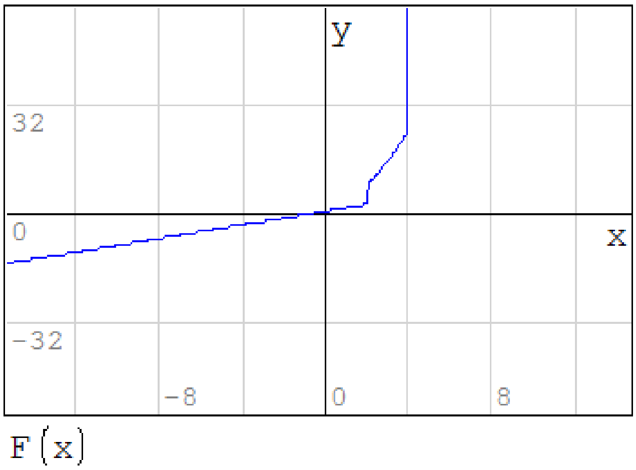
Przykład 1b

W przypadku przedziałów zmienności funkcji jej wartości można wyznaczyć poprzez użycie polecenia warunkowego *„if”* jako argumentu innego polecenia warunkowego *„if”*. Przykład rozwiązania tego problemu przedstawia Rys. 29.

$$F(x) := \begin{cases} x+1 & x<2 \\ (x+1)^2 & 2 \le x \le 4 \\ (x+1)^3 & x>4 \end{cases}$$

```
F(x) := if x < 2
            x + 1
        else
            if | x ≥ 2
               | x ≤ 4
                (x + 1)^2
            else
                (x + 1)^3
```

Linia bloku instrukcji z Menu Programowanie (line)



Rys. 29. Zapętlenie funkcji „if" wraz z wykresem wartości funkcji F(x)

10. Pętla iteracyjna „*for*"

Przykład użycia pętli *„for"* widoczny jest na Rys. 30. Aby wykonać poniższy przykład należy wprowadzić zmienną zakresową oraz, za pomocą polecenia *length,* obliczyć ilość elementów zmiennej w jej zakresie, po to by każdemu argumentowi został przypisany indywidualny numer. W omawianym przykładzie zmienna x mieści się w zakresie <10, 20>, w który wchodzi 11 elementów (n = 11). Po wprowadzeniu polecenia *for* musimy podać zakres, w którym przeprowadzamy obliczenia, w naszym przypadku i = od *1 do n*, oznacza to iż pętla obliczy wartości funkcji y dla argumentów od x_1 do x_i. Jak widzimy $x_1 = 10$, $x_2 = 11$ *itd.* Gdy $i = 5$ to pętla obliczy wartość funkcji y dla piątego elementu z zakresu zdefiniowanych argumentów x.

$$x := 10 \,..\, 20$$
$$n := \mathrm{length}(x)$$
$$n = 11$$
$$\mathrm{for}\ \ i \in 1 \,..\, n$$
$$y_i := x_i + 1$$

Indeks dolny w tym przypadku otrzymujemy nie znakiem kropki [.], tylko poleceniem *el*

$$x = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_1 = 10 \\ x_2 = 11 \\ x_{10} = 19 \\ x_{11} = 20 \end{matrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Rys. 30. Zastosowanie pętli „for"

Przykład 1c

```
x := 1 .. 10
n := length(x)
for i ∈ 1 .. n
   y[i,1] := if x[i] ≤ 5
                x[i]
             else
                x[i] + 100
```

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 106 \\ 107 \\ 108 \\ 109 \\ 110 \end{pmatrix}$$

```
z := 1 .. 10
for j ∈ 1 .. length(z)
   q[j] := if z[j] ≤ 5
              z[j]
           else
              z[j] + 100
```

$$q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 106 \\ 107 \\ 108 \\ 109 \\ 110 \end{pmatrix}$$

Przykład 1d

Samochód jedzie z prędkością 300km/h i nagle zaczyna hamować z przyspieszeniem równym 5m/s^2. Prędkość samochodu mierzono od chwili rozpoczęcia hamowania co 4s przez 28s. Podaj prędkość samochodu w 0s, 4s, 8s, 12s i 16s hamowania, kiedy prędkość zacznie przyjmować wartość ujemną przy pomocy odpowiedniej funkcji wstaw wartość 0.

$$t := 0\,s ; 4\,s \,..\, 28\,s \qquad V_0 := 300\,\frac{km}{hr}$$

$$a := 5\,\frac{m}{s^2}$$

$$t = \begin{pmatrix} 0 \\ 4\,s \\ 8\,s \\ 12\,s \\ 16\,s \\ 20\,s \\ 24\,s \\ 28\,s \end{pmatrix}$$

$$n := \mathrm{length}(t)$$

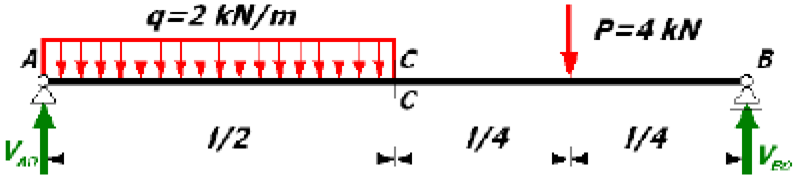
$$n = 8$$

```
for i ∈ 1 .. n
  V_i := if V_0 - a·t_i ≥ 0
              V_0 - a·t_i
           else
              0
```

$$V = \begin{pmatrix} 83{,}333\,\frac{m}{s} \\ 63{,}333\,\frac{m}{s} \\ 43{,}333\,\frac{m}{s} \\ 23{,}333\,\frac{m}{s} \\ 3{,}333\,\frac{m}{s} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Przykład 1e

Oblicz moment zginający i siłę poprzeczną w belce obciążonej jak na poniższym rysunku.



$l := 20\ m$

$q1 := 2\ \dfrac{kN}{m}$

$P := 4\ kN$

$V1 := \dfrac{\left(q1\cdot\frac{l}{2}\cdot 3\cdot\frac{l}{4} + P\cdot\frac{l}{4}\right)}{l}$

$V1 = 16\ kN$

$V2 := -V1 + q1\cdot\dfrac{l}{2} + P$

$V2 = 8\ kN$

$x := 0\,..\,20$

$n := \mathrm{length}(x)$

$n = 21$

$\text{for } k \in 1\,..\,n$

$\quad M_k := \text{if } x_k \le n - \dfrac{l}{2\ m}$

$\qquad V1\cdot x_k\,m - \dfrac{q1\cdot x_k^{\,2}\,m^2}{2}$

$\quad \text{else}$

$\qquad \text{if } \left| \begin{array}{l} x_k \ge n - \frac{l}{2\ m} \\ x_k \le \frac{3}{4}\cdot\frac{l}{m} + 1 \end{array} \right.$

$\qquad\quad V1\cdot x_k\,m - q1\cdot\dfrac{l}{2}\cdot\left(x_k\,m - \dfrac{l}{4}\right)$

$\qquad \text{else}$

$\qquad\quad \text{if } x_k \ge \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{l}{m} + 1$

$\qquad\qquad V2\cdot\left(l - x_k\,m\right)$

$\qquad\quad \text{else}$

$\qquad\qquad \text{error}$

$\text{for } k \in 1\,..\,n$

$\quad Q_k := \text{if } x_k \le 11$

$\qquad V1 - q1\cdot x_k\,m$

$\quad \text{else}$

$\qquad \text{if } \left| \begin{array}{l} x_k \ge 11 \\ x_k \le 16 \end{array} \right.$

$\qquad\quad V1 - \dfrac{q1\cdot l}{2}$

$\qquad \text{else}$

$\qquad\quad \text{if } x_k \ge 16$

$\qquad\qquad -V2$

$\qquad\quad \text{else}$

$\qquad\qquad \text{error}$

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 28 \\ 39 \\ 48 \\ 55 \\ 60 \\ 63 \\ 64 \\ 63 \\ 60 \\ 55 \\ 52 \\ 48 \\ 44 \\ 40 \\ 36 \\ 24 \\ 16 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} kN\,m \qquad Q = \begin{pmatrix} 16 \\ 14 \\ 12 \\ 10 \\ 8 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \\ -6 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \\ -8 \\ -8 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} kN$$

MW := augment (x ; M) QW := augment (x ; Q)